Auffrischungskurs Schulwissen.

1: 1.1 Spaß. Weiß ich genug um etwas lösen zu können?
Einige Beispiele.

- Uni = Studierende versuchen aus Dozenten das Wissen rauszuziehen. Es wird das Wissen nicht (mehr) gefüttert.

- Lernen = machen = üben. Nur so (und nicht durch hören/wiederholen) kann man sicher sein, ob man was verstanden hat.

- Jeder trägt selbst die Verantwortung: bin ich gut genug, oder muss ich mehr machen. Das einzige Maß ist die Klausur(-e), aber dann ist es wohl zu spät.

- Wer heute hier ist, kapiert mit hoher Wahrscheinlichkeit (mindestens intuitiv) diese Punkte.

- Dieser Kurs = Selbsthilfekurs.
  Anderes (sehr gutes) Selbsthilfemittel = Lernwerkstatt in der Mensa, täglich (außer Freitag) 15:00 – 18:45.

- Der Zeitplan für das ganze Semester ist bereits online einsehbar. Noch vorläufig, ab 2-3 VL-Woche wird aber schon feststehen.

- Wir werden als Grundlage das Buch von van de Craats und Bosch "Grundwissen Mathematik" benutzen.
  Bücher selbst auswählen. Hauptsache, viele Übungsaufgaben drin!
  Empfehlenswert ist die Teilnahme an einem online-Brückenkurs (z.B. OMB+). Das wichtigste ist? üben!

Beginn: jeden Tag um Punkt $10:\underline{\underline{00}}$.

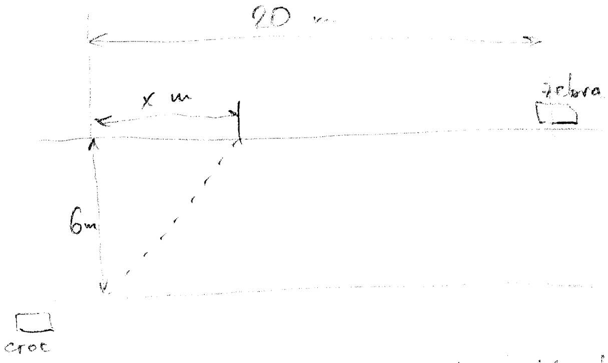
Anmelden bitte, wer noch nicht gemacht hat → nur anonymisierte Statistik oder evtl. kann eine Ankündigung per E-Mail verschickt werden.

- Wie kann ich Spaß an Mathe haben?
  → interessante Aufgaben lösen, unerwartete Verbindungen und Zusammenhänge entdecken, [logisch denken]

Dafür müssen aber die nötigen Grundbegriffe / Sachverhalte ganz gut verstanden werden! Ohne kann man nicht mal sagen, ob die Aufgabe, z.B., vollständig ist, und damit überhaupt lösbar!

Heute werden wir einige Übungsaufgaben anschauen, für welche man gewisses Grundwissen braucht. Los gehts!

A1.



Ein Krokodil jagt eine Zebra. Diese ist 20m stromaufwärts auf dem anderen Ufer eines Flusses (6m breit). Der Krokodil hat verschiedene Geschwindigkeiten am Land und im Wasser.

Wie kommt der Krokodil zur der Zebra am schnellsten?

Ang: v - Geschwindigkeit am Land (m/s), x - der Punkt, wo er aus dem Wasser rauskommt (m)
w - Geschwindigkeit im Wasser

Der Krok. [illegible] schwimmt $\sqrt{6^2+x^2}$ m (Pythagoras) mit Geschw. w, braucht dafür also

$$\frac{\sqrt{6^2+x^2}}{w} \text{ s}$$

Das läuft der Krok die restlichen $(20-x)$ m mit Geschwindigkeit v, also in

$$\frac{20-x}{v} \text{ s}$$

Zusammen ergibt dies $f(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{w} + \frac{20-x}{v}$ s, wofür wir nach dem Minimum suchen.

Es sei $w = 2$ m/s, $v = 2{,}5$ m/s. Wie viel Zeit brauch der Krok,

(a) wenn er nur schwimmt.

(b) wenn er die kürzeste Strecke schwimmt.

(c) Minimal.

$f(x) = 0{,}5\ \sqrt{36+x^2} + 0{,}4\ (20-x)$

(a) $f(20) = 0{,}5 \sqrt{36+400} + 0{,}4\ (20-20)$

$= 0{,}5\ \sqrt{436}$

$\underset{\text{ungefähr}}{\approx} 10{,}44 (s)$ $\quad \underset{\text{genau}}{=} \frac{1}{2} 2 \sqrt{109}\ (s)$

(b) $f(0) = 0{,}5 \sqrt{36+0} + 0{,}4 \cdot 20$

$= 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 20$

$= 3 + 8 = 11\ (s)$

(c) Berechne die Ableitung. Schreibe dafür zuerst

$f(x) = 0{,}5 (36+x^2)^{\frac{1}{2}} + 0{,}4(20-x)$

$f'(x) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} (36+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + 0{,}4(-1)$

$= \frac{0{,}5x}{\sqrt{36+x^2}} - 0{,}4$

Kritische Punkte = Lösungen von $f'(x) = 0$.

$\frac{0{,}5x}{\sqrt{36+x^2}} - 0{,}4 = 0$

$\frac{0{,}5x}{\sqrt{36+x^2}} = 0{,}4$

$0{,}5x = 0{,}4 \sqrt{36+x^2}$

Nun beide Seiten quadrieren:

$0{,}25x^2 = 0{,}16(36+x^2)$

$0{,}25x^2 = 5{,}76 + 0{,}16x^2$

$0{,}09x^2 = 5{,}76$

$x^2 = 64$

$x = 8$ ($x = -8$ nicht Möglich, da Zeit)

Die gebrauchte Zeit:

$f(8) = 0{,}5 \sqrt{36+8^2} + 0{,}4 (20-8)$

$= 0{,}5 \sqrt{100} + 0{,}4 \cdot 12$

$= 0{,}5 \cdot 10 + 4{,}8$

$= 9{,}8\ (s)$

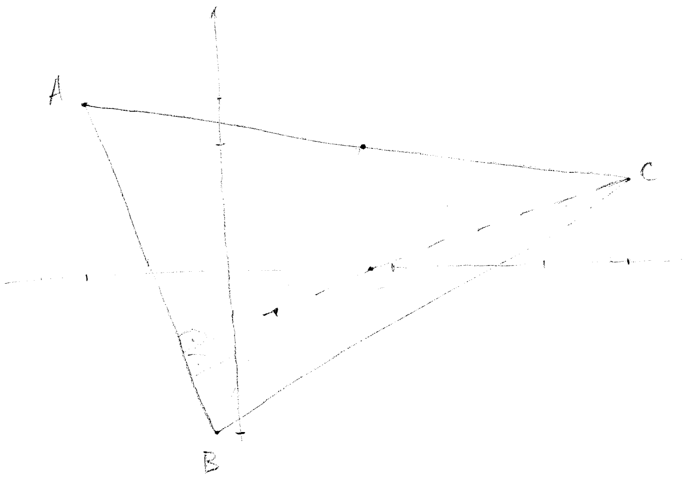
Welches Grundwissen wird fürs Lösen dieser Aufgabe benötigt?
(vgl. Zeit/Thema-Plan auf der Homepage)

- Kurvendiskussion: Optimierung
- Ableitungen: Kettenregel, Potenzfunktion
- Dreieckgeometrie: Pythagoras

Aber auch

- Lösen der Gleichungen: quadratische
- Rechnen mit Buchstaben
- Wurzeln

A2. Die Ecken des Dreiecks Δ sind $A(-5,7)$, $B(-1,-5)$ und $C(13,3)$, siehe Bild. Die gestrichelte Linie entspricht der Höhe von C.



(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Höhe von C $x-3y=4$ ist.

(b) Finden Sie die Gleichung der Seitenhalbierenden von B.

(c) Finden Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Höhe von C und der Seitenhalbierenden von B.

(d) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks Δ.

Hilfe: Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte (a_1,a_2) und (b_1,b_2) ist $(a_1-b_1)(y-b_2)=(a_2-b_2)(x-b_1)$

(a) Was kann ich anwenden/benutzen? $AB \perp$ Höhe von C.
oder (äquiv) $AB \parallel$ Normalenvektor zur Höhe von C.

$\vec{AB} = (-1,-5)-(-5,7)=(4,-12)$

Normalenvektor zur Geraden $x-3y=4$ ist $(1,-3)$.

Müssen noch überprüfen, ob C tatsächlich auf dieser Geraden liegt. Setze dafür einfach ein

$$13 - 3 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 4$$
$$13 - 9 = 4 \quad \checkmark$$

Also die Aussage in (a) stimmt.

<u>Zum Knobeln:</u> Wie kann ich die Geradengleichung für diese Höhe von C selbst erstellen?

(b) Die Seitenhalbierende von B ist eine Gerade, die durch B und Mitte der Seite AC geht.

Die Mitte der Seite AC findet man als $\frac{1}{2}(A+C)$ <u>Warum?</u>

$$M = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(-5+13,\ 7+3) = \frac{1}{2}(8, 10) = (4,5)$$

Gerade durch Punkte $B(-1,-5)$ und $M(4,5)$ hat die Gleichung

$$(-1-4)(y+5) = (-5-5)(x+1)$$
$$-5y-25 = -10x-10$$
$$y+5 = 2x+2$$
$$2x-y = 3$$

<u>Probe:</u> setze B und M in diese Gleichung ein!

(c) Schnittpunkt findet man als Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

z.B. $\text{II} - 2\text{I}$: $5y = -5 \Rightarrow y = -1$

in I: $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

Also ist $S = (1,-1)$

(d) Fläche $= \frac{1}{2}$ Seite $\cdot$ Höhe $= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$ (Vektorprodukt)

können annehmen, dass $z=0$ ist!

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt H der Höhe von C und der Seite AB?

z.B. wie in (b), (c) vorgehen.

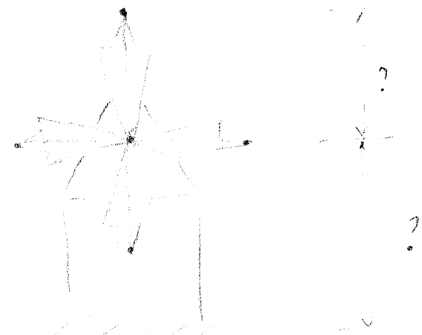
Auch weitere Lösungswege möglich

Länge der Seite AB.

$|AB| = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

Welches Wissen wurde hier benutzt?

- Geometrie der Ebene: Geradengleichung durch 2 Punkte.
- Vektoren- (koordinaten) Rechnung
- Lineare Gleichungssysteme
- Abstand



A3 Die Höhe h des Endpunktes eines Flügels im Zeitpunkt t (s) ist gegeben durch

$h = 36 \sin(1{,}5t) - 15\cos(1{,}5t) + 65.$

Finden Sie 2 Werte von t, für welche der Flügelendpunkt auf der Höhe von genau 100 Meter (während des ersten Rundgangs) ist.

Hinweis: Schreiben Sie dafür $36\sin(1{,}5t) - 15\cos(1{,}5t)$ als $k \cdot \sin(1{,}5t - a)$, wobei $k > 0$ und $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Wir kennen die Additionstheoreme: $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Wir wenden dies auf $k \sin(1{,}5t - a)$

$$k \sin(1{,}5t - a) = k \sin(1{,}5t)\cos a - k\cos(1{,}5t)\sin a$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} k\cos a = 36 \\ k \sin a = 15 \end{cases}$$

Zuerst berechnen wir k: $I^2 + II^2$

$$k^2\cos^2 a + k^2 \sin^2 a = 36^2 + 15^2$$

$$k^2 \cdot 1 = 1296 + 225 = 1521$$

$k = 39$ (-39 kommt wegen $k>0$ nicht infrage)

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = \frac{36}{39} = \frac{12}{13} \\ \sin a = \frac{15}{39} = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow a \approx 0{,}3948 \approx 22{,}62°$$

Jetzt suchen wir nach Lösungen der Gleichung $h = 100$, d.h.

$$39 \sin(1{,}5t - 0{,}3948) + 65 = 100$$

$$39 \sin(1{,}5t - 0{,}3948) = 35$$

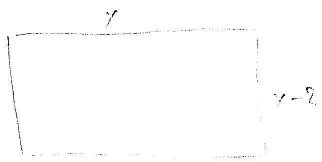
$$\sin(1{,}5t - 0{,}3948) = \frac{35}{39} = 0{,}8974$$

$$1{,}5t - 0{,}3948 = 1{,}11284 + k\pi, \quad k = 0,1,2,\dots$$

(1) $1{,}5t \approx 1{,}5 \Rightarrow t \approx 1$ s

(2) $1{,}5t \approx 4{,}65 \Rightarrow t \approx 3{,}1$ s.

A4 ABCD ist ein Rechteck mit Seiten x cm und $(x-2)$ cm



Was sind die möglichen Werte für x, falls es bekannt ist, dass die Fläche von ABCD < 15 cm² ist?

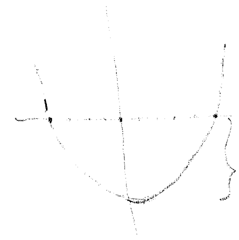
$x(x-2) < 15$

$x^2 - 2x - 15 < 0$.

Löse zuerst $x^2 - 2x - 15 = 0$

abc-Formel: $D = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 8}{2} = 5$ oder -4.

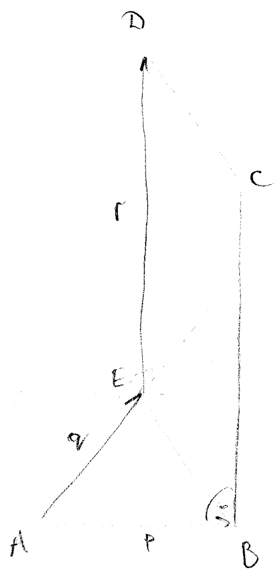


$-4<x<5$

Da x, $x-2$ die Seitenlängen sind, gilt $x>0$, $x-2>0$

$\Rightarrow$ Antwort $2<x<5$.

A5



Bekannt ist:

- BCDE ist ein Parallelogramm
- ABE ist ein gleichseitiges Dreieck
- $|p| = 3$
- $\angle ABC = 90°$

Berechne: (a) $p \cdot (q+r)$

(b) Stelle $\vec{EC}$ als Kombination von p, q und r dar

(c) Berechne $|r|$ unter der Annahme dass $\vec{AE} \cdot \vec{EC} = 9\sqrt{3} - \frac{9}{2}$.

(a) $p \cdot (q+r) = p \cdot q + p \cdot r$

1) $p \cdot q = |p| \cdot |q| \cdot \cos \angle(p,q)$

$|q| = |p|$ und $\angle(p,q) = 60°$ ~ folgt aus $\triangle ABE$!

$\Rightarrow p \cdot q = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

2) $p \cdot r = 0$, denn $p \perp \vec{BC}$ und $\vec{BC} \parallel r$ (Parallelogramm)

also $p \cdot (q+r) = \frac{9}{2}$

(b) $\vec{EC} = \underbrace{\vec{EB}}_{=p-q} + \underbrace{\vec{BC}}_{=r} = p - q + r$

(c) $q \cdot \vec{EC} = q \cdot (p - q + r) = q \cdot p - q \cdot q + q \cdot r$

$q \cdot p = p \cdot q = \frac{9}{2}$

$q \cdot q = |q|^2 = 3^2 = 9$

$q \cdot r = |q| \cdot |r| \cdot \cos \angle(q,r)$

$= 3|r| \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} |r|$

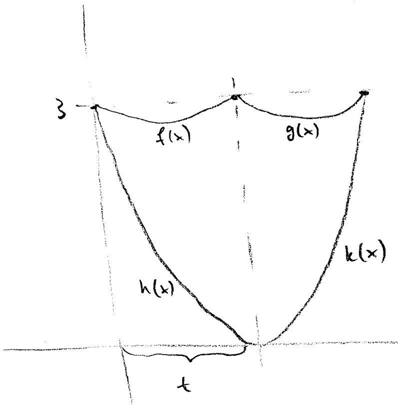
$\angle(q,r) = 30°$
(Pfeile müssen aus demselben Punkt rausgehen!)

$\Rightarrow \quad 9\sqrt{3} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - 9 + \frac{3\sqrt{3}}{2} r$

$\Rightarrow \quad 9\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} |r|$

$|r| = \frac{3\,\cancel{9\sqrt{3}} \cdot 2}{\cancel{3\sqrt{3}}} = 6$

A6



Der Designer hat eine Gedenktafel entworfen. Dafür hat er nur Parabolas (quadr. Funktionen) benutzt.

Er hat gewählt

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ $\quad \left(g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 5\right)$

$h(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$ $\quad \left(k(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right)$

. Die Drei Punkte oben liegen auf der Geraden $y=3$.

. Die Tafel ist symmetrisch.

Um einen Muster nachzumachen, soll er aber an den 3D-Drucker die Funktionsvorschriften von allen 4 Funktionen f, g, h, k überreichen. Können wir ihm helfen?

Wie könnte man vorgehen?

- Zuerst finden wir die $(x=t)$ Symmetrie-Achse, z.B. durch lösen von $f(x)=3$
- Nun bemerken wir, dass $g(x)$ genau dem $f(x)$ entspricht, nur um t nach rechts versetzt.
- Für $k(x)$ wissen wir, dass es $h(x)$ (nach LINKS!) versetzt ist. Aber um wieviel? $\quad K(x) = h(x \mp s)$ (+ wegen LINKS!) Benutze, dass die Punkte "x" $(t,0)$ und $(2t, 3)$ auf dem Graphen liegen

A7.

$\frac{25.047}{3.949.400} + \frac{11.422.401}{67.139.800} = ?$

1) Finde kgV von den beiden Nenner (mit Primfaktorzerlegung)

$3.949.400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 31$ $\quad \Rightarrow \text{kgV} = 2^3\, 5^2\, 7^2\, 13 \cdot 31 \cdot 17$

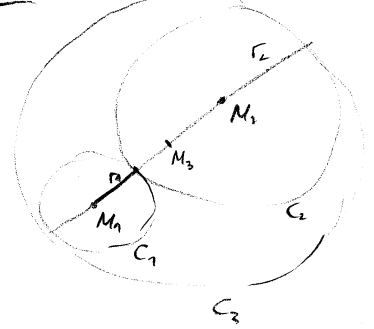
$67.139.800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31$

$\frac{25.047}{2^3 5^2 7^2 \, 13 \cdot 31}^{17)} + \frac{11.422.401}{2^3 5^2 7^2 \, 13 \cdot 31 \cdot 17} = \frac{425.799 + 11.422.401}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \, 13 \cdot 17 \cdot 31} = \frac{11.848.200}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31}$

und $11.848.200 \xrightarrow[100=2\cdot2\cdot5\cdot5]{} 118482 \xrightarrow[2]{} 59241 \xrightarrow[3]{} 19747 \xrightarrow[7]{} 2821 \xrightarrow[7]{} 403 \xrightarrow[13]{} 31$

$11.848.200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 31$ $\quad$ und $\quad \frac{\cancel{2^3 5^2} \cdot 3 \cdot \cancel{7^2} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{31}}{\cancel{2^3 \cdot 5^2} \cdot \cancel{7^2} \cdot \cancel{13} \cdot 17 \cdot \cancel{31}} = \frac{3}{17}$

A8.



- Der Kreis C_1 hat die Gleichung $x^2+y^2+6x+10y+9=0$
- Der Mittelpunkt des Kreises C_2 ist $(9, 11)$
- C_1 und C_2 berühren sich von außen
- C_3 berührt C_1 und C_2 von innen
- Mittelpkte von C_1, C_2 und C_3 liegen auf einer Geraden.

a) Berechne den Radius von C_2.

b) Was ist die Gleichung von C_3?

C_1: $x^2+y^2+6x+10y+9=0$ quadratische Ergänzung

$(x^2+6x+9)-9+(y^2+10y+25)-25+9=0$

$(x+3)^2+(y+5)^2=25$

$M_1=(-3,-5)$, $r_1=5$

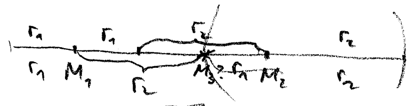
C_2: $M_2=(9,11)$, $r_2 = d(M_1,M_2)-r_1$

$= \sqrt{(-3-9)^2+(-5-11)^2}-5$

$= \sqrt{12^2+16^2}-5$

$= \sqrt{144+256}-5 = 20-5 = \underline{\underline{15}}$

C_3: Wo liegt M_3?



$r_3 = r_1+r_2$, $M_3=(x,y)$

$d(M_1,M_3)=r_2$

z.B. $d(M_2,M_3)=r_1$

$\Rightarrow \sqrt{(-3-x)^2+(-5-y)^2} = 15$

$\sqrt{(9-x)^2+(11-y)^2} = 5$

$x^2+6x+9+y^2+10y+25=225$

$- \quad x^2-18x+81+y^2-22y+121=25$

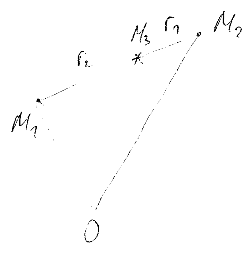
$24x-72+32y-96=200$

$3x+4y=46$

$y=\frac{23}{2}-\frac{3}{4}x$

Einsetzen, nach x Lösen, ... $\to$ $x=6$, $y=7$

Geht auch einfacher:



$\vec{OM_3} = \vec{OM_1} + \frac{r_2}{r_1+r_2}(\vec{M_1M_2})$

$M_3 = M_1 + \frac{r_2}{r_1+r_2}(M_2-M_1)$

$= (-3,-5)+\frac{15}{20}(12,16)$

$= (-3,-5)+(9,12) = (6,7)$

§2. Rechnen. Ganze Zahlen, Brüche, Potenzen und Wurzeln.

2.1. Ganze Zahlen

Bsp. Was ist $\frac{25.047}{3.949.400} + \frac{11.422.401}{67.139.800}$?

- Nenner der Summe = Produkt (besser kgV) der beiden Nenner
- Brüche soll man kürzen = ggT von Zähler und Nenner
- Ganzzahlige Anteil bestimmen = Division mit Rest

▼ Division mit Rest: $n = q \cdot k + r$, wobei $0 \le r < k$

(n durch k, Rest r)

Bsp 83218 durch 37 mit Rest

$$\begin{array}{l|l} 83218 & 37 \\ \underline{74} & 2249 \\ \ \ 92 & \\ \ \ \underline{74} & \\ \ \ 181 & \\ \ \ \underline{148} & \\ \ \ \ \ 338 & \\ \ \ \ \ \underline{333} & \\ \ \ \ \ \ \ 5 & \end{array}$$

Somit gilt

$$83218 = 2249 \cdot 37 + 5$$

oder (teile beide Seiten durch $k = 37$)

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

▼ Teiler und Primzahlen

Ist der Rest = 0, so sagt man "k teilt n" oder "k ist ein Teiler von n"

Bsp $238 = 14 \cdot 17$ geht aber auch weiter

$14 = 2 \cdot 7$

Somit ist $238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$ und weiter geht es nicht mehr

Zahlen, die keine Teiler (außer 1 und sich selbst) heißen Primzahlen.

Bsp 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61.

Finde Primfaktorzerlegung = finde alle Primteiler: teile durch Primzahlen

Bsp. $180 \xrightarrow[2]{} 90 \xrightarrow[2]{} 45 \xrightarrow[3]{} 15 \xrightarrow[3]{} 5 \Rightarrow 180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$585 \xrightarrow[3]{} 195 \xrightarrow[3]{} 65 \xrightarrow[5]{} 13 \Rightarrow 585 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

$3003 \xrightarrow[3]{} 1001 \xrightarrow[\cancel{2}\cancel{3}\cancel{5}\,7]{} 143 \xrightarrow[11]{} 13 \Rightarrow 3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

▶ ggT und kgV erkennt man aus der Primfaktorzerlegung

Bsp
$180 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$

$585 = 3^2\cdot 5\cdot 13$

$3003 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13$

$ggT(180, 585) = 3^2\cdot 5 = 9\cdot 5 = 45$ (Produkt aller gemeinsamen Primteiler mit Wiederholungen)

$ggT(180, 3003) = 3$

$ggT(585, 3003) = 3\cdot 13 = 39$

$kgV(180, 585) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13 = 2340$ (alle Primteiler mit jeweils höchster Potenz)

$kgV(180, 3003) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$

kgV · ggT = Produkt der beiden Zahlen!

2.2. Brüche

Bruch ist eine schreibweise einer rationalen Zahl

Bsp $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{50}{20}$ haben alle den gleichen Wert

▶ Ist ggT (Zähler, Nenner) $\neq 1$, so kann man kürzen, sonst heißt der Bruch unkürzbar.

Jeden Bruch kann man unkürzbar machen
= Zähler und Nenner durch ihren ggT teilen

▶ Um zwei Brüche zu addieren (subtrahieren) muss man die zuerst gleichnahmig machen = zum gleichen Nenner (am besten kgV) bringen

Bsp a) $\frac{4}{15}, \frac{5}{21}$ $\quad kgV(15, 21) = 105 = 15\cdot 7 = 21\cdot 5$ $\Rightarrow$ $\frac{4}{15} = \frac{4\cdot 7}{105} = \frac{28}{105}$

$\frac{5}{21} = \frac{5\cdot 5}{21} = \frac{25}{105}$

$\frac{4}{15} + \frac{5}{21} = \frac{28}{105} + \frac{25}{105} = \frac{53}{105}$

b) $\overset{5)}{-\frac{7}{12}} + \overset{4)}{\frac{4}{15}} = \frac{-35 + 16}{60} = -\frac{19}{60}$

c) $\overset{10)}{\frac{2}{3}} + \overset{3)}{\frac{3}{10}} - \overset{2)}{\frac{2}{15}} = \frac{20 + 9 - 4}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

▶ Multiplikation und Division

Bsp a) $\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{7} = \frac{5\cdot 12}{13\cdot 7} = \frac{60}{91}$; b) $\frac{63}{40}\cdot\frac{16}{27} = \frac{63\cdot 16}{40\cdot 27} = \frac{3^2\cdot 7\cdot 2^4}{2^3\cdot 5\cdot 3^3} = \frac{2\cdot 7}{3\cdot 5} = \frac{14}{15}$

c) $\frac{5}{13} : \frac{12}{7} = \frac{5}{13}\cdot\frac{7}{12} = \frac{5\cdot 7}{13\cdot 12} = \frac{35}{156}$

2.3 Ausdrücke mit Buchstaben

- Distributivgesetz: $a(b+c) = ab + ac$

  Bananenformel: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

  Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\vdots$$

Binomischer Lehrsatz $\rightarrow$ $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b$

Binomialkoeffizienten

Bsp a) $(5a+3b)(2a-7b) = 10a^2 - 35ab + 6ab - 21b^2 = 10a^2 - 29ab - 21b^2$

b) $2016^2 = (2000+16)^2 = 2000^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 16 + 16^2$
$= 4.000.000 + 64.000 + 256$
$= 4.064.256$

c) $1997 \cdot 2003 = (2000-3)(2000+3) = 2000^2 - 3^2 = 3.999.991$

- Brüche mit Buchstaben. Aufpassen! Der Nenner darf nicht Null sein!

Bsp (kürzen) a) $\dfrac{3a+9b^2}{6a-3} = \dfrac{a+3b^2}{2a-1}$ (Z. und N. durch 3 geteilt)

b) $\dfrac{7b}{b+2b^3} = \dfrac{7b}{b(1+2b^2)} = \dfrac{7}{1+2b^3}$, $b \neq 0$! (Z. und N. durch b geteilt, aber dass nur für $b \neq 0$ möglich

c) $\dfrac{a^2-4}{a-2} = \dfrac{(a+2)(a-2)}{a-2} = a+2$, $a \neq 2$!

Bsp a) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2-b^2}{ab}$

b) $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a+1-(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \dfrac{a+1-a+1}{a^2-1} = \dfrac{2}{a^2-1}$

2.4 Potenzen und Wurzeln

- Für $a \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k \text{ mal}}$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

a ist die Grundzahl, k ist die Exponente

▶ Eigenschaften: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

▶ Die (quadratische, zweite) Wurzel aus einer Zahl $a \geq 0$ ist die Zahl w, für die gilt $w \geq 0$ und $w^2 = a$. Notation $w = \sqrt{a}$

Bsp. a) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7}$ ← kann man nicht vereinfachen

c) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{\frac{11}{15}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$ ← wir wollen aber generell keine Wurzel im Nenner haben

$\sqrt{\frac{11}{15}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 15}{15 \cdot 15}} = \frac{1}{15}\sqrt{165}$ ← Standardform

▶ Die n-te Wurzel aus a ist die Zahl w mit $w^n = a$ (für n gerade muss $a \geq 0$ sein!)

Bsp a) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{14}{15}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{3150}$ ← in Standardform

▶ Potenzen mit rationalen Exponenten

für $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ gilt

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} \quad ; \quad a^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a}$$

Es gelten die selben Rechenregel wie oben (also denke $n, m \in \mathbb{Q}$)

Bsp a) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; b) $a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

c) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}$ (geht auch mittels $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$
$7^{\frac{3}{2}} = 7^{1+\frac{1}{2}} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{7}$)

d) $2^{\frac{5}{3}} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

1| Übung 1 Rechnen. Ganze Zahlen. Brüchen. Potenzen und Wurze

A1 Dividiere mit Rest

- 154 : 13
- 435 : 27
- 631 : 23
- 2334 : 53
- 6463 : 101
- 6178 : 451

A2 Finden Sie die Primfaktorzerlegung

24, 72, 250, 288, 1024, 315, 1875

972, 676, 2025, 1122, Geburtsjahr, PLZ

A3* Finde ALLE Teiler von

12, 20, 32, 144, 72, 100, 1001

A4 Bestimmen Sie den ggT von

- 12 und 30
- 34 und 85
- 144 und 216
- 90 und 196
- 1024 und 864
- 875 und 1125
- 1243 und 1244
- 1024 und 2024

A5 Bestimmen Sie das kgV von

- 18 und 63
- 16 und 40
- 144 und 240
- 250 und 125
- 888 und 185
- 315 und 189

A6* Bestimmen Sie den ggT und das kgV von

- 9, 12 und 30
- 18, 27 und 63
- 21, 24 und 27
- 28, 35 und 49
- 144, 168 und 252
- 189, 252 und 315

2|

Bsp $\frac{25.047}{3.949.400} + \frac{11.422.401}{67.139.800} = ?$

1) Find kgV von den beiden Nennern

$3.949.400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 31$

$67.139.800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31 \quad \Rightarrow \text{kgV} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31$

2) $\frac{25.047}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 31}^{17)} + \frac{11.422.401}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31} = \frac{425.799 + 11.422.401}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31} = \frac{11.848.200}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31}$

3) kürzen

$11.848.200 \xrightarrow[100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5]{} 118482 \xrightarrow[2]{} 59241 \xrightarrow[3]{} 19747 \xrightarrow[7]{} 2821 \xrightarrow[7]{} 403 \xrightarrow[13]{} 31$

$11.848.200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 31$ und

$\frac{\cancel{2^3} \cdot 3 \cdot \cancel{5^2} \cdot \cancel{7^2} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{31}}{\cancel{2^3} \cdot \cancel{5^2} \cdot \cancel{7^2} \cdot \cancel{13} \cdot 17 \cdot \cancel{31}} = \frac{3}{17}$ ✓

A7 Berechne und schreibe die Antwort als unkürzbarer Bruch

- $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$
- $\frac{4}{15} - \frac{3}{10}$
- $\frac{3}{34} + \frac{1}{85}$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
- $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18}$
- $\frac{1}{18} - \frac{7}{30} - \frac{3}{20}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{4}$
- $\frac{6}{35} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{14}{9}$
- $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$
- $\frac{\frac{5}{9} + \frac{3}{10}}{\frac{3}{4} - \frac{8}{9}}$
- $\frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}$
- $\frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$

A8 Bringen Sie auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen:

$\frac{3a + 18}{9b - 6}$ $\qquad \frac{1}{a-3} - \frac{1}{a^2-9}$ $\qquad \frac{a^2-1}{a-1} - \frac{a^2+1}{a+1}$

$\frac{a^2 + a}{a+1}$ $\qquad \frac{a^2+1}{a-3} + \frac{a^2-1}{a+3}$ $\qquad \frac{a^2+ab}{a^2-b^2} + a - 1$

$\frac{a^2b + ab^2}{3abc}$ $\qquad \frac{b}{a-b} + \frac{a}{b-a}$ $\qquad \frac{a}{a^2-4} - \frac{2}{4-a^2}$

Bsp $\frac{-4x+37}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$ Für welche A und B gilt dies?

Bringe die rechte Seite auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \frac{Ax + 3A + Bx - 4B}{(x-4)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-4B)}{(x-4)(x+3)}$$

Koeffizientenvergleich mit der linken Seite liefert:

$$\begin{cases} A + B = -4 \\ 3A - 4B = 37 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= -4 - B \\ 3(-4-B) - 4B &= 37 \\ -12 - 3B - 4B &= 37 \\ -7B &= 49 \\ B &= -7 \quad \Rightarrow \quad A = -4-(-7) = 3 \end{aligned}$$

$A = 3, \quad B = -7$ ✓

A9* Finde A und B, C, für die gilt:

a) $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ $(A = -5, \ B = 6)$

b) $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ $(A = \frac{1}{2}, \ B = -\frac{1}{2}$

** c) $\frac{3x^2-4x-5}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$ $(A = B = C = 1)$

A10 Schreibe in Standardform, d.h $a\sqrt{b}$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{b}$ nicht vereinfachbar ist

$\sqrt{36}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{147}$	$2\sqrt{14} \cdot (-3\sqrt{21})$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$
$\sqrt{18}$	$\sqrt{242}$	$3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4\sqrt{10}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{288}$	$-5\sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{2}$		

A11 Schreibe als n-te Wurzel in Standardform: $a \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \in \mathbb{Q}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$	$5^{-\frac{2}{7}}$	$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$
$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[4]{27}$	$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[2]{3}}$
$\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$	$9^{-\frac{2}{5}}$	$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[2]{7}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[2]{2}}$
$\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$		

§3. Binomialkoeffizienten. Arithmetische und geometrische Folgen. Folgen und Grenzwerte.

Bsp. Wir haben 16 Karten: 4 Buben, 4 Damen, 4 König, 4 Ass
Was ist die W., dass unter 8 Karten genau 2 Asse sind?
(genau 1, keine?)

▸ Binomische Formeln Pascalsches Dreieck

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \dots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \quad n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \quad n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \quad n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \quad n=5
\end{array}$$

Koeffizienten in der Entwicklung von $(a+b)^n$
= Binomialkoeffizienten

▸ Binomialkoeff.

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen

Bsp $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$, $\binom{7}{4} = 35$

Formel: $$\binom{n}{k} = \boxed{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ (n Fakultät: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

! Für Berechnung immer DIE Formel benutzen, und dann die gem. Teiler kürzen.

Bsp 1) 4 aus 7: $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = 7\cdot 5 = 35$

2) 8 aus 16: $\binom{16}{8} = \frac{\cancel{16}\cdot\cancel{15}\cdot\cancel{14}\cdot 13\cdot\cancel{12}\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}} = 13\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 13$

2 Asse aus 4: $\binom{4}{2} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{1\cdot 2}} = 2\cdot 3 = 6$

6 (nicht Asse) aus 12 (nicht Asse): $\binom{12}{6} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 11\cdot 7\cdot 4\cdot 3 = 2^2 3\cdot 7\cdot 11$

genau 2 Asse: $\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{6} = 2^3 3^2\, 7\cdot 11$

Wahrscheinlichkeit: $\frac{\text{Passende Er.}}{\text{Alle Er.}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{12}{6}}{\binom{16}{8}} = \frac{2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 13} = \frac{4\cdot 7}{5\cdot 13} = \frac{28}{65}$

3) Es gilt immer: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

▶ Die Σ-Notation

Der Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

alle Terme haben dieselbe Form $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ für ein passendes k.

Abkürzende Notation: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

<u>Bsp</u> 1) $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

2) $\sum\limits_{j=-2}^{2} 3^j = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2$

3) $(a+1)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k}$ (b=1 und n=7 in die b. Formel eins.)

$(a-1)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^{12-k}(-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k} a^{12-k}$

▶ Arithmetische Folge

= Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit konstanter Differenz $a_{n+1} - a_n$

<u>Bsp</u> $1, 2, 3, 4, \ldots$ Diff = 1

$3, 8, 13, 18, \ldots$ Diff = 5

Kleiner Gauß: $1+2+3+\ldots+100 = 5050$ (im Kopf)

$$\begin{array}{l} 1+2+3+\ldots+99+100 \\ +\ 100+99+98+\ldots+2+1 \\ \hline 101+101+101+\ldots+101+101 \end{array} = 100 \cdot 101 = 2S \Rightarrow S = \tfrac{1}{2}\,100 \cdot 101$$

i.A. $1+2+\ldots+n = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\begin{array}{l} +\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ \ \ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 \\ \hline (a_1+a_n) + \ldots + (a_1+a_n) \end{array}$$

$\Rightarrow a_1 + \ldots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1+a_n)$ ← Summe der ar. Folge

▶ Geometrische Folgen / Reihen:

g. Folge = Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wenn für jedes n gilt $a_{n+1} = a_n r$ (für ein fester r)

<u>Bsp</u> $1, 2, 4, 8, 16, 32$ $a_0 = 1,\ r = 2$

$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ $a_0 = 3,\ r = 2$

i.A $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ $a_0 = a,\ r$

Summe der Geom. Folge:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad \text{falls } r \neq 1$$

(siehe Übung für den Beweis)

Ist $-1<r<1$, so geht $r^n \to 0$ bei $n \to \infty$

Bsp $r = 0{,}95$ $r^{100} \approx 0{,}00592$, $r^{1000} \approx 0{,}59218 \cdot 10^{-22}$

symbolisch $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

für $-1<r<1$ ist die unendliche Summe (die Geom. Reihe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Bsp $a = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$:

$$\sum \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$

Bsp (periodische Dezimalzahlen)

$$0,\overline{3} = 0{,}333\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$[a = \frac{3}{10},\ r = \frac{1}{10}]$

- Folgen und Grenzwerte:

Bsp. Wir legen 1000€ in die Bank. Die Verzinsung ist 2,4% p.a., wird aber monatlich ausgezahlt. Wieviel Geld nach einem Jahr auf dem Konto?

Lö: Nach 0 Monaten: $K_0 = 1.000$

1 Mo : $K_1 = K_0 + \frac{0{,}024}{12} K_0 = K_0 + 0{,}002 K_0 = 1{,}002 K_0$

i Mo : $K_i = K_{i-1} + \frac{0{,}024}{12} K_i = 1{,}002 K_i = 1{,}002^i K_0$

nach 12 Mo: $K_{12} = 1{,}002^{12} K_0$

Hier haben wir die Folge $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (für $x = 0{,}024$)

Bei $n\to\infty$ (d.h. Zinsen werden nahezu stetig ausgezahlt)?

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Einige einfache Grenzwerte:

$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ $r>1$ $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$ $p>0$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ $-1<r<1$ $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $p>0$

$\lim_{n\to\infty} r^n$ existiert nicht bei $r=-1$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ $p>0$

Bsp (Quotienten)

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+4}{3n^2+4n+9}$ teile Z und N. durch die Höhste Potenz (hier n^2)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}} = \frac{2}{3}$ denn $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{4}{n^2}\to 0$, $\frac{4}{n}\to 0$ und $\frac{9}{n^2}\to 0$ als $n\to\infty$

- Wachstumsraten von Folgen

Es gilt n^p wächst langsamer als

a^n $(a>1)$ ——

$n!$ ——

n^n

$a^n = a \cdot a \cdots a$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

$n^n = n \cdot n \cdot n \ldots n$

Regel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{langsamer}}{\text{schneller}} = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{schneller}}{\text{langsamer}} = \infty$

Bsp 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{1+2^n} =$ (Teile durch die Schnellste, hier 2^n) „dominanter" Term

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\frac{n^2}{2^n}}{\frac{1}{2^n}+1} = 0$ ($\frac{n^2}{2^n} \to 0$)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ($\frac{1}{3^n} \to 0$)

1\ Übung 2

A1 1) Ergänze das Pascalsche Dreieck bis $n=10$.

2) Berechne (ausklammern) $(a+1)^8$, $(a-1)^5$, $(a-b)^{10}$

A2 Berechne

$\binom{7}{1}$, $\binom{12}{0}$, $\binom{12}{7}$, $\binom{13}{5}$, $\binom{50}{48}$, $\binom{28}{4}$

Aus 16 Karten (je 4 B, D, K, A) werden 8 gezogen.
Bestimme die W. dass darunter

1) genau 1 Ass
2) kein Ass
3) genau je 1 von B, D, K ist ;)
4) mindestens 2 Ass

Bsp. $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} = \binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5} = (1+1)^5 = 2^5 = 32$

b. Lehrsatz mit $a=1$, $b=1$!

A3 Berechne (wähle passende a, b im b. Lehrsatz)

$\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$, $\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-1)^k$, $\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}2^k$; $*\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $*\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$

A4 Berechne die Summe

0) $\sum_{k=0}^{6}k^2$; $\sum_{k=-4}^{4}k^3$; $\sum_{j=1}^{3}\left(j+\frac{1}{j}\right)$; $\sum_{k=3}^{7}(2k+4)$; $\sum_{j=-1}^{1}(j^2-1)$

1) $1+2+\ldots+2016$
2) pos. ganzen Zahlen mit 3 Ziffern
3) ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000
4) pos. ganzen Zahlen von je max. 3 Ziffern, die auf 2 oder 7 enden.

$\sum_{k=10}^{70}(7k-2)$; $\sum_{k=0}^{14}(5k+3)$; $\sum_{k=-2}^{22}(100k+10)$

Bsp Alt. Lö

$$\sum_{k=1}^{20}(3k+2) = \sum_{k=1}^{20}3k + \sum_{k=1}^{20}2 = 3\underbrace{\sum_{k=1}^{20}k}_{\text{Gauß}} + 2\cdot 20 = 3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21 + 40$$

Bsp (Summe der geom. Reihe) $a_n = ar^n$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$
$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n+1}$$
$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

2| A5 Berechne die Summe

$2+4+8+\dots+256$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{256}$

$2+6+18+54+\dots+1458$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\dots+\frac{64}{729}$

$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\dots+\frac{3}{10.000.000}$

$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ (unendlich)

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\dots$

$1-\frac{9}{10}+\frac{81}{100}-\frac{729}{1000}+\dots$

$7+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\dots$

A6 Finden Sie den unkürzb. Bruch für die periodische Zahl:

$0{,}\overline{9}$; $0{,}\overline{12}$; $0{,}00\overline{12}$; $10{,}\overline{3}$; $0{,}\overline{2}$; $1{,}\overline{9}$; $0{,}\overline{123}$

$0{,}\overline{10}$; $3{,}0\overline{91}$;

Hinweis: $0{,}00\overline{12} = \frac{1}{100}\cdot 0{,}\overline{12}$

$10{,}\overline{3} = 10 + 0{,}\overline{3}$

A6 Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für:

$a_n = \frac{n+1}{n}$

$a_n = \frac{2n}{n+12}$

$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

$a_n = \frac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$

$a_n = \frac{2n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

$a_n = \frac{n+\frac{1}{n}}{n-\frac{2}{n}}$

$a_n = \frac{n^3-1}{n^3+n^2}$

$a_n = \frac{4n^2+5n+n\sqrt{n}}{3n^2-2n-1}$

$a_n = \frac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}}$

A7 Berechne folgende Grenzwerte:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n+n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^2-2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+3n-7)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3^n}{n^3+3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n+2^{-n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n!}{3^n-n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+3n^9-7}{n^n+3n^9+7}$

§4 Lineare Gleichungen als Geraden in $\mathbb{R}^2$ / Ebenen in $\mathbb{R}^3$. Parameterdarstellung, Orthogonalität, Normalenvektor. Schnittmengen und lineare Gleichungssysteme

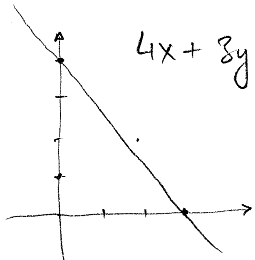
▶ Geraden

Lösungsmenge der Gleichung $ax+by=c$ (mit a,b nicht gleichzeitig $=0$) ist eine Gerade.

Bsp 1) Ist etwa $b \neq 0$ so kann man umformen

$$by = c - ax$$

$$y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{\frac{c}{b}}_{\text{Schnittpkt mit } y\text{-Achse}}$$

2)  $4x + 3y = 12$

Bestimme Schnittpkte mit Achsen:

y-Achse $(x=0)$: $3y = 12 \Rightarrow y = 4$

x-Achse $(y=0)$: $4x = 12 \Rightarrow x = 3$

Die Gerade durch zwei Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) hat Gleichung

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

Bsp (ohne Formel) $A = (0,3)$, $B = (3,0)$

wir suchen a, b, c mit

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 3 = c \\ a\cdot 3 + b\cdot 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3b \\ c = 3a \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{3}c$$

z.B. $3x + 3y = 1$ oder $x + y = \frac{1}{3}$

Bsp Überprüfe, ob drei Punkte auf einer Gerade liegen:

1) $(2,1)$, $(3,0)$ und $(1,2)$

Gleichung der Geraden durch $(2,1)$ und $(3,0)$ ist $x + y = 3$

Erfüllt $(1,2)$ die Gleichung? $1 + 2 = 3$ ✓ JA

2) $(2,2)$, $(0,1)$ und $(-2,0)$

Alt. Methode: Gesucht a, b, c mit

$$\begin{cases} a\cdot 2 + b\cdot 2 = c \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 = c \\ a(-3) + b\cdot 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = c \\ b = c \\ -3a = c \end{cases}$$

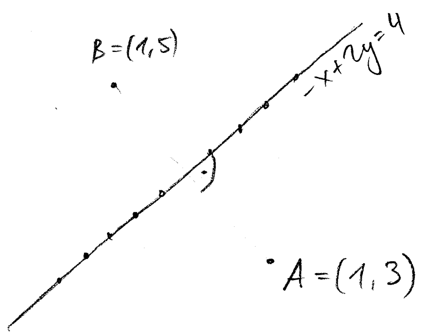
Lösung ist $a = b = c = 0$

$\Rightarrow$ keine Gerade!

▶ Abstand. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ $\quad d(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$

Bsp $d\big((4,9), (8,1)\big) = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

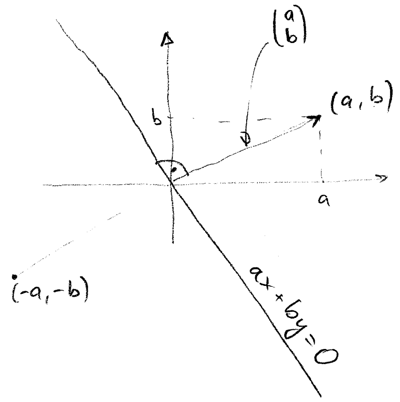
Bsp 1) Bestimme die Mittelsenkrechte von $A=(3,1)$ und $B=(1,5)$



Sei $P=(x,y)$. P liegt auf der Mittelsenkrechten $\Leftrightarrow d(P,A)=d(P,B)$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$$
$$\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-2y+1 = \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-10y+25$$
$$-4x+8y=16$$
$$-x+2y=4$$

2) Mittelsenkrechte von (a,b) und $(-a,-b)$



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 = x^2+2ax+a^2+y^2+2by+b^2$$
$$-4ax-4by=0$$
$$ax+by=0$$

Vektor $n=\binom{a}{b}$ steht senkrecht auf die Gerade mit Gleichung $ax+by=c$
(verschiedene c = parallele Geraden)
heißt Normalenvektor der Geraden

Bsp 1) Gerade mit $n=\binom{1}{2}$ durch $A=(4,3)$

$G: \quad x+2y=c \qquad \Rightarrow \qquad G: \quad x+2y=10$

$A\in G: \quad c=4+2\cdot 3=10$

2) Geraden mit Gleichungen

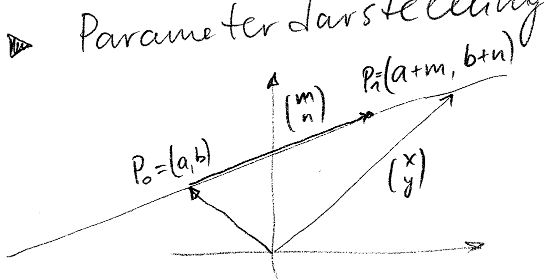
$G_1: \quad x+2y=1$

$G_2: \quad 2x-y=3$

sind orthogonal, denn $n_1=\binom{1}{2}$ und $n_2=\binom{2}{-1}$ orth. sind und $n_1\perp n_2 \Leftrightarrow G_1\perp G_2$

$$\binom{a}{b}\perp\binom{c}{d} \Leftrightarrow ac+bd=0$$

▶ Parameterdarstellung der Geraden:



$$\binom{x}{y}=\binom{a}{b}+\binom{m}{n}t, \quad t\in\mathbb{R}$$

$\binom{a}{b}$: Stützvektor, $\binom{m}{n}$: Richtungsvektor

Bsp $\binom{x}{y}=\binom{-1}{1}+\binom{3}{1}t$. Der Normalenvektor n ist senkrecht auf $\binom{3}{1}$, z. B. $n=\binom{-1}{3}$. Also ist G die Gerade mit $n=\binom{-1}{3}$ durch Punkt $\binom{-1}{1}$

$G: -x+3y=4$

▸ Raum $\mathbb{R}^3$

Es seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

1) Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $a \perp b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0$

2) Länge von a : $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3) Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Bsp $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

steht senkrecht auf beide a und b!

▸ Ebenen und Normalenvektoren

$ax + by + cz = d$ Gleichung einer Ebene

$n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene

Bsp 1) $15x + 20y + 12z = 60$

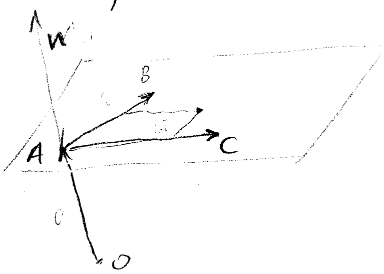
Schnittpunkte mit Koord.-Achsen?

x-Achse : $y = z = 0$: $\Rightarrow x = \frac{60}{15} = 4$

y-Achse : $z = x = 0$: $\Rightarrow y = 3$

z-Achse : $x = y = 0$: $\Rightarrow z = 5$

2) Ebene durch drei Punkte $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,1,1)$



Parameterdarstellung der Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + \vec{AB} \cdot s + \vec{AC} \cdot t, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind ein "Koordinatensystem" der Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ s+t \\ t \end{pmatrix}$$

Bestimme nun einen Normalenvektor n. Es muss sein $n \perp \vec{AB}$, $n \perp \vec{AC}$,

z.B. $n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist die Gleichung

$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = d$

Einsetzen des Punktes A liefert d:

$d = 1 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad E: x = 1$

Geraden im Raum

$E_1 \parallel E_2 \iff n_1 \parallel n_2 \iff n_1$ und n_2 sind Vielfachen

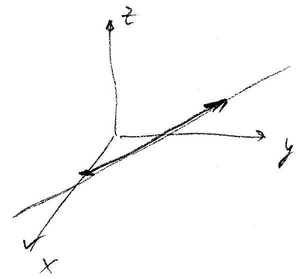
Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich entlang einer Geraden

Bsp 1) $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 2x+y-z=2 \quad -2\mathrm{I} \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 5y-5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+2z=1 \\ y=z \end{cases}$

Parameterdarstellung? Setze $z=t$:

$y=t \quad , \quad x = 1+2y-2z = 1+2t-2t = 1.$ Oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Stützv.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsv.}} t$$



Zwei Geraden im Raum:

1) sind parallel $\iff$ Richtungsvektoren parallel
2) schneiden sich, oder
3) sind windschief: kein von den Beiden

Bsp: $G_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \quad ; \quad G_2: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$

1) nicht parallel, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

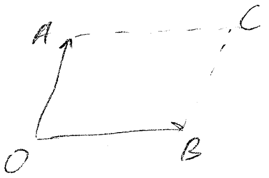
2) schneiden sich?

setze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} s$

$\begin{cases} 1+t=s \\ t=-1+2s \\ 1=2+3s \end{cases}$ $\quad \mathrm{II}$ in I: $1-1+2s=s \Rightarrow s=0$; $\quad \mathrm{III}$: $s=-\frac{1}{3}$ $\quad ↯ \Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow$ schneiden sich nich $\Rightarrow$ windschief.

Bonus (Winkel zwischen zwei Vektoren)



$\varphi = \measuredangle AOB$, dann ist

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|}$$

Bsp $A=(0,1,0)$, $B=(0,2,3)$

$\cos\varphi = \frac{2}{1\cdot\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} > 0 \Rightarrow$ spitzer Winkel

Fläche des Parallelogramms OACB

$F(OACB) = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 3$

Übung 3

A1 Zeichne die Geraden (bestimme zuerst Schnittpkte mit Achsen)

$x+1=1$; $x-y=0$; $2x+8y=-10$; $-3x+y=0$; $x=2y$

A2 Bestimme Gleichung und Parameterdarst. der Geraden:

1) durch $(3,5)$ und $(3,7)$
2) durch $(1,-2)$ und $(3,5$
3) durch $(1,3)$ mit $n=\binom{2}{2}$
4) durch $(2,3)$ mit $n=\binom{1}{-2}$
5) durch $(0,-3)$ senkrecht zur $G: 2x+7y=-2$

A3 Gegeben sei ein Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(2,2)$ und $(3,0)$

a) Bestimme Seitenlängen und (cos von) Eckwinkel
b) Höhengerade durch C
*c) Medianen, Mittelsenkrechten, Schnittpunkte, ... (zum überlegen)

Bsp Mittelsenkrechte Ebene von $A=(3,3,2)$ und $0=(0,0,0)$

$$d(A,X) = d(0,X)$$
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-6y+9+\cancel{z^2}-4z+4 = x^2+y^2+z^2$$
$$-6x-6y-4z=-22 \qquad n=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$$
$$3x+3y+2z=11$$

A4* Bestimme nun Parameterdarstellung dieser Ebene

A5 Bestimme Gleichung und Param.darstellung der Ebene:

1) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}t$
2) yz-Ebene
3) durch $(0,2,1)$, $(1,1,-2)$, $(0,0,0)$
4) durch $(2,4,-1)$ mit $n=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

A6 Liegen die drei Punkte auf einer Gerade?

1) $(1,-2)$, $(0,-5)$ und $(3,4)$
2) $(-1,1)$, $(1,3)$, $(4,5)$
3) $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$
4) $(1,1,1)$, $(2,1,-1)$ und $(-1,1,5)$

A7* Liegen die vier Punkte auf einer Ebene?

1) $(0,1,2)$, $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$
2) $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,2,3)$

Bsp Bestimme den Schnittpkt (falls vorhanden) der Ebene $E: \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}s$ und der Geraden

$$G: \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}t = \begin{pmatrix}t\\1+t\\2+t\end{pmatrix}$$

Man könnte die Paramdrst gleisetzen und LGS lösen, geht aber eleganter:

1) finde die Gleichung der Ebene:

$$n = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow -x-2y+z=d$$

und $d = 0-2+1 = -1$

2) Setze "die Gerade" in die Gleichung der Ebene

$$-t-2(1+t)+(2+t) = -1$$

$$\cancel{-t}-\cancel{2}-2t+\cancel{2}+\cancel{t} = -1$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Also ist $E \cap G = \left\{\begin{pmatrix}1/2\\3/2\\5/2\end{pmatrix}\right\}$

A8 Entscheide über die gemeinsame Lage, bestimme Schnittmenge

1) Ebene $3x+y+2z=-2$ und Ebene durch $(-1,2,1), (0,2,-2), (0,3,-$

*2) Ebene durch $(1,-2,1), (2,-1,2)$ und $(1,-2,0)$, sowie Ebene $x+y-z=0$

Ebene: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}t$

3) G_1 und G_2, G_2 und G_3, G_1 und G_3, wobei

$G_1: \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t$; $G_2: \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}t$; $G_3: \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}t$

§5 Quadratische Gleichungen. Kreise

▸ Quadratische Gleichungen

Bsp (Reduktion zur linearen Gleichung)

1) $4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

2) $3x^2 - 2 = x^2 + 2$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

3) $x(x+3) = 0$

„oder" $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x+3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right.$

4) $(3x-1)^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} 3x-1 = 2 \\ 3x-1 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3 \\ 3x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Jede Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$, $p, q \neq 0$, kann man immer in die Form $(x+d)^2 = e$ bringen. Dieser Prozess heißt "quadratische Ergänzung".

Bsp 1) $x^2 - 6x + 3 = 0 \qquad +3^2$

$(x^2 - 2\cdot 3x + 3^2) + 3 = 3^2$

$(x-3)^2 = 6$

$\left[\begin{array}{l} x-3 = \sqrt{6} \\ x-3 = -\sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+\sqrt{6} \\ x = 3-\sqrt{6} \end{array}\right.$

2) $x^2 + 10x + 30 = 0$

$(x^2 + 2\cdot 5x + 5^2) + 30 = 25$

$(x+5)^2 = -5 \qquad ⚡$

keine Lösungen

3) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

▸ pq-Formel.

Wir führen quadratische Ergänzung für $x^2 + px + q = 0$:

$$\left(x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow\quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} \qquad pq\text{-Formel}$$

▶ Kreis

mit Mittelpunkt $M = (m,n)$ und dem Radius r ist die Menge aller Pkte X, die Abstand r zu M haben, d.h. $d(X,M) = r$ ist:

Gleichung $\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$

oder $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

Bsp $M = (2,3)$, $r = 4$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

i. A. kann jede Kreisgleichung in der Form

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

geschrieben werden. Aber nicht jede Gleichung dieser Form entspricht einem Kreis!

Bsp 1) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14 = 0$

qudratische Ergänzung

$$\underline{x^2 - 4x + (4 - 4)} + \underline{y^2 - 6y + (9 - 9)} + 14 = 0$$

$$\underbrace{(x-2)^2 + (y-3)^2}_{\text{positiv}} = \underbrace{-1}_{\text{negativ}} \quad \lightning \quad \text{Lösungsmenge ist } \emptyset$$

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ — Kreis mit $M = (2,3)$ und $r = 0$ (also ein Punkt)

Bsp (Schnittmenge zweier Kreise)

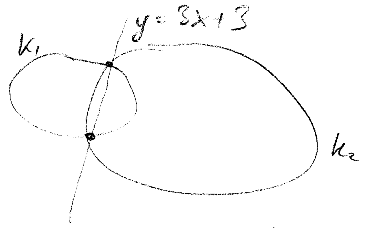
$K_1:\ x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

$K_2:\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$

Wie löst man ein solches GS?

$I - II: \quad 6x - 2y + 6 = 0$

$y = 3x + 3$ (die Schnittpunkte liegen auf einer Geraden)



Einsetzen in die quadratische Gleichung liefert nun:

$$x^2 + (3x+3)^2 + 2x - 6(3x+3) + 1 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 + \cancel{18x} + 9 + 2x - \cancel{18x} - 18 + 1 = 0$$

$$10x^2 + 2x - 8 = 0 \implies x_1 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = -1$$

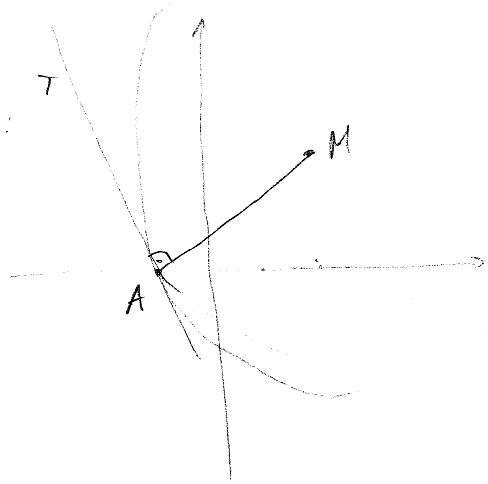
einsetzen in Geradengl. liefert: $y_1 = \frac{27}{5}$, $y_2 = 0$

Also ist $k_1 \cap k_2 = \left\{ \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right), (-1, 0) \right\}$

Bsp (Tangente) Finde die Tangente T an den Kreis

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$

durch den Punkt $(-1, 0)$.



1) Bestimme den Mittelpkt des Kreises:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$M = (2,2)$, $r = \sqrt{13}$. Die Gerade T ist senkrecht zum Radius-Vektor $\overrightarrow{MA}$

$\vec{n} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, d.h.

$T: \ -3x - 2y = c$ mit

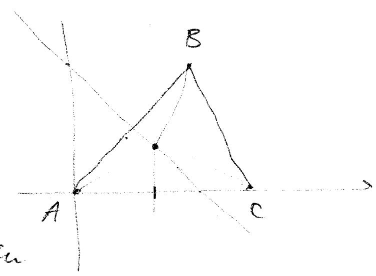
$A \in T: \ c = -3(-1) - 2 \cdot 0 = 3$

Also hat T die Gleichung $-3x - 2y = 3$ oder $3x + 2y = -3$

Bsp (Umkreis eines Dreiecks)

Gegeben sei ein Dreieck mit Ecken $A = (0,0)$, $B = (2,2)$, $C = (3,0)$

Bestimme die Gleichung des Umkreises



1) Mittelpkt = Schnittpkt der Mittelsenkrechten

von A und C: $x = \frac{3}{2}$

von A und B: $y = -x + 2$

$\implies y = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \implies M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

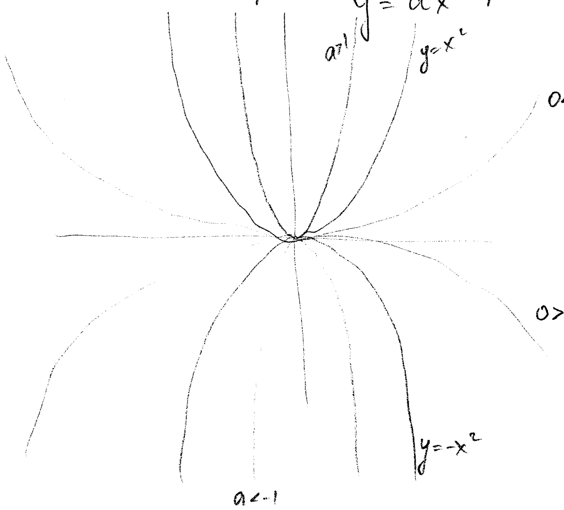
2) $r = d(M, A) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

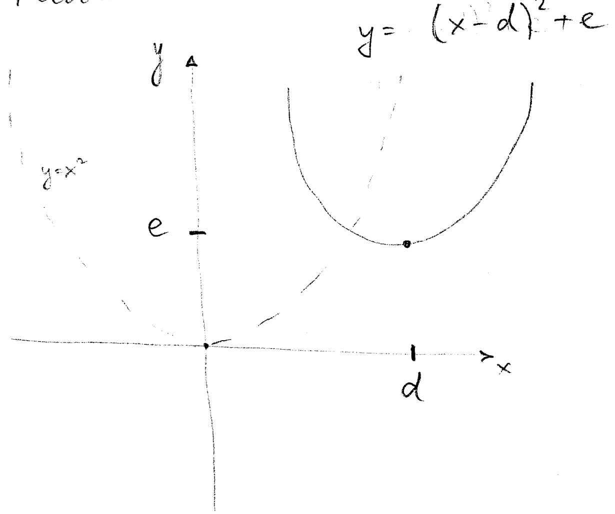
Gleichung: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{10}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x - y = 0$$

Graph einer quadratischen Funktion



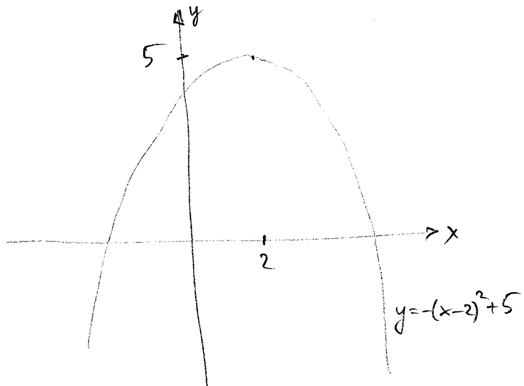


i. A.: ist der Graph von $f(x)$ gegeben, so ist:

- der Graph von $f(x)+b$ um b nach oben verschoben,
- der Graph von $f(x-k)$ um k nach rechts verschoben.

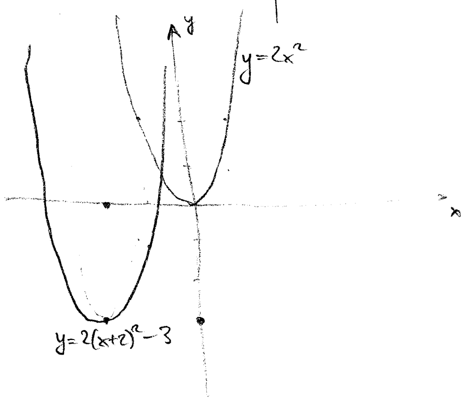
<u>Bsp</u> 1) Skizziere $y = -x^2 + 4x - 1$

$$y = -(x^2 - 4x - 1)$$
$$= -\left[(x^2 - 4x + 4) - 4 - 1\right]$$
$$= -\left[(x-2)^2 - 5\right] = -(x-2)^2 + 5$$



2) Skizziere $y = 2x^2 + 8x + 5$

$$y = 2\left[(x^2 + 4x + 4) - 4 + \frac{5}{2}\right]$$
$$= 2\left[(x+2)^2 - \frac{3}{2}\right] = 2(x+2)^2 - 3$$



1]

Übung 4

A1 Löse die Gleichungen

$(x-4)^2 = 9$ | $x^2+4x+1=0$ | $-x^2+x+1=0$

$(x+1)^2 = (2x-1)^2$ | $x^2-12x+6=0$ | $x^4-6x^2=7$

$(2x+1)^2 = 4(x+1)^2$ | $x^2-13x-7=0$ | $x-2\sqrt{x}=3$

$2x^2-12x+9=0$ | $\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) = 1-\sqrt{x}$

A2 Schreibe Kreisgleichungen in der Form $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$M=(0,0)$, $r=2$; $M=(-2,2)$, $r=2\sqrt{2}$; $M=(3,-2)$, $r=\sqrt{13}$

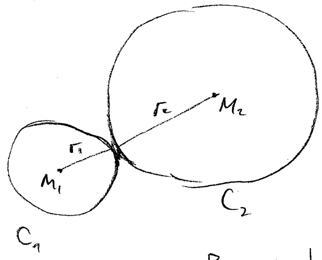
A3 Beschreiben die folgenden Gleichungen einen Kreis? Falls ja, bestimme Mittelpunkt und Radius.

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$ | $x^2+y^2+2x+2y=0$

$x^2+y^2+x-y-1=0$ | $x^2+y^2-8x+16=0$

A4 Berechne die Schnittpkt von je zwei Kreise aus A3.

A5



- Der Kreis C_1 hat die Gleichung
  $x^2+y^2+6x+10y+9=0$
- Der Mittelpkt des Kreises C_2 ist $(9,11)$
- C_1 und C_2 berühren sich von außen

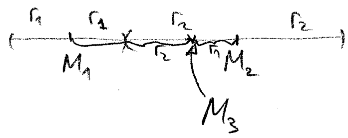
Berechne den Radius von C_2.

Bsp Wir betrachten in A5 noch den Kreis C_3, der C_1 und C_2 von innen berührt. Außerdem liegen die Mittelpkte M_1, M_2, M_3 alle auf einer Geraden. Was ist die Gleichung von C_3?

(in A5 gilt: $M_1 = (-3,-5)$, $r_1 = 5$, $r_2 = 15$)

Der Diameter von C_3 ist $r_1+r_1+r_2+r_2$, also gilt $r_3 = r_1+r_2$

$$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{r_2}{r_1+r_2}\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix} + \frac{15}{20}\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$



Also ist die Gleichung

$$(x-6)^2 + (y-7)^2 = 20^2$$
$$x^2-12x+36+y^2-14x+49-400=0$$
$$x^2+y^2-12x-14x-315=0$$

A6 Die Kreise : $K_1: \; x^2+y^2-2x+2y=0$

$K_2: \; x^2+y^2+2x+6y+8=0$

schneiden sich in einem Punkt. Finde diesen Punkt sowie die Tangente durch diesen Punkt

2)

A7 Skizziere die Graphen folgender quadratischen Funktionen und bestimme den Scheitelpunkt:

$y=3x^2+1$; $y=2x^2-24x^2+75$; $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{7}{8}$; $y=3x^2-\frac{9x}{2}+\frac{27}{16}$

A8* Bestimme die Tangentialebene an die Kugel

$$x^2+y^2+z^2-4x+4y-4\sqrt{2}z=0$$

durch den Punkt $(0,0,0)$.

Bsp Der Punkt $T=(-2,-5)$ liegt auf dem Kreis C mit der Gleichung $(x+8)^2+(y+2)^2=45$.

a) Finde die Gleichung der Tangente g zum Kreis C durch den Punkt T

b) Die Gerade g aus Teil a) ist auch eine Tangente zur Parabel $y=-2x^2+px+1-p$, wobei $p>3$ ist. Bestimme p.

a) $M=(-8,-2)$, $n=\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, also

$$g: \quad 6x-3y=c$$

$$T\in g: \quad c=6\cdot(-2)-3(-5)=-12+15=3$$

$$\Rightarrow \quad 6x-3y=3 \quad \text{oder} \quad 2x-y=1 \quad \text{oder} \quad y=2x-1$$

b) g Tangente zur Parabel $\Rightarrow$ g und Parabel haben <u>genau</u> einen Schnittpunkt, d.h. die Gleichung

$$2x-1=-2x^2+px+1-p$$

$$-2x^2+(p-2)x+(2-p)=0$$

genau eine Lösung hat. Also muss die Diskriminante

$$D=(p-2)^2-4\cdot(-2)\cdot(2-p)=p^2-4p+4+16-8p=p^2-12p+20=0$$ sein.

$$(p^2-12p+36)-36+20=0$$

$$(p-6)^2=16$$

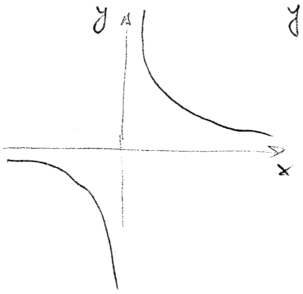
$$\left[\begin{array}{l} p-6=4 \\ p-6=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underline{p=10} \\ p=2 \end{array}\right. \leftarrow \text{(wegen } p>3\text{)}.$$

§6. Graphen von Funktionen.

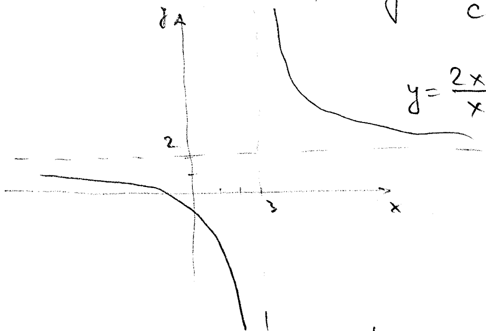
Exponentialfunktionen und Logarithmen

$f(x-k)+b$ ist die $f(x)$ um k nach rechts und um b nach oben verschoben.

▸ Gebrochen lineare Funktionen, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$



$y=\frac{1}{x}$



$y=\frac{2x+4}{x-3}$

Wie kann man Asymptoten bestimmen?

Bsp 1) $y=\frac{2x+4}{x-3}$ ist die verschobene Version von $a\cdot\frac{1}{x}$, d.h

$$\frac{2x+4}{x-3}=\frac{a}{(x-k)}+b=\frac{a+b(x-k)}{x-k}=\frac{bx+(a-k)}{x-k}.$$

$\Rightarrow k=3,\ b=2,\ a-k=4 \Rightarrow a=4+3=7$

die Asymptoten sind also $x=3$ (senkrechte) und $y=2$ (waagerechte)

2) $y=\frac{2-x}{2x-1}=\left[:2\right]=\frac{-\frac{1}{2}x+1}{x-\frac{1}{2}}=\frac{bx+(a-k)}{x-k}$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2};\ a=1+k=\frac{3}{2}$

die Asymptoten sind: $x=\frac{1}{2}$ und $y=-\frac{1}{2}$

Geht aber auch schneller!

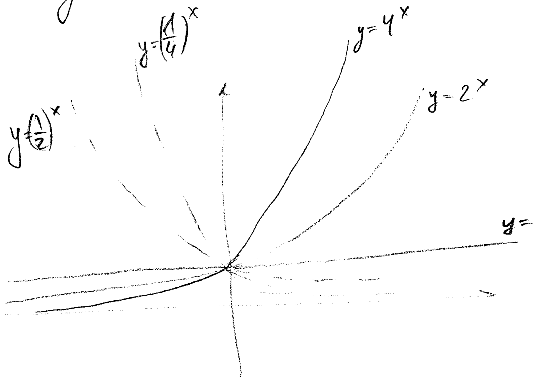
die senkrechte = Nullstelle des Nenners, i.A. $x=-\frac{d}{c}$

die waagerechte = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}$, i.A. $y=\frac{a}{c}$

▸ Exponentialfunktionen

$f(x)=a^x$ für $a>0$

- wächst für $a>1$
- fällt für $0<a<1$



$\left(\frac{1}{a}\right)^x=\left(a^{-1}\right)^x=a^{-x}$

(Spiegelung an y-Achse von a^x)

Rechenregeln (zur Erinnerung):

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ $\qquad (a^x)^y=a^{x\cdot y}$

$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ $\qquad (a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

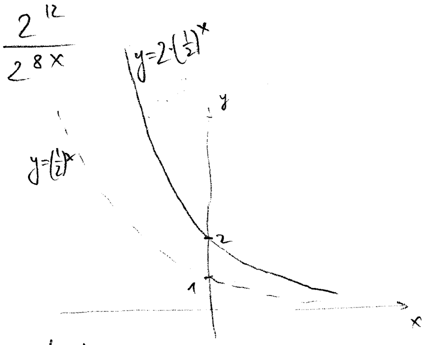
$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$

Bsp 1) $(2^3)^5 \cdot (2^5)^3 = 2^{3\cdot 5} \cdot 2^{5\cdot 3} = 2^{15+15} = 2^{30}$ = 1 Gigabyte :)

2) $(2^{3-2x})^4 = 2^{3\cdot 4 - 8x} = 2^{12} \cdot 2^{-8x} = \frac{2^{12}}{2^{8x}}$

3) Skizziere $f(x) = 2^{1-x}$

$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Besser! $f(x) = 2^{-(x-1)}$, also ist 2^{-x} um 1 nach rechts verschoben

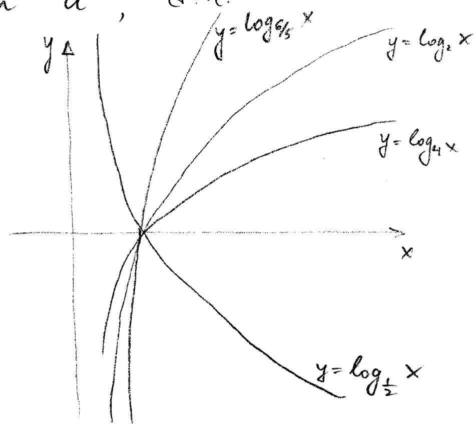
▸ Logarithmen

$$\log_a x = y \iff a^y = x \qquad x>0,\ a>0,\ a \neq 1$$

$f(x) = \log_a x$ heißt logarithmische Funktion zur Grundzahl a und ist invers zur Exponentialfunktion a^x, d.h.

$$a^{\log_a x} = x \qquad (\text{für jedes } x>0)$$

$$\log_a (a^y) = y \qquad (\text{für jedes } y)$$



Die Eigenschaften von Logarithmen:

$$\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (x,y>0)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad (x,y>0)$$

$$\log_a (x^p) = p \cdot \log_a x \qquad (x>0)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (x>0,\ \underset{\text{beliebig}}{b>0,\ b\neq 1})$$

$\log_a x$ – Spiegelung von a^x an der Geraden $y=x$

Bsp 1) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 (2^{-2}) = (-2)\cdot \log_2 2 = -2\cdot 1 = -2$

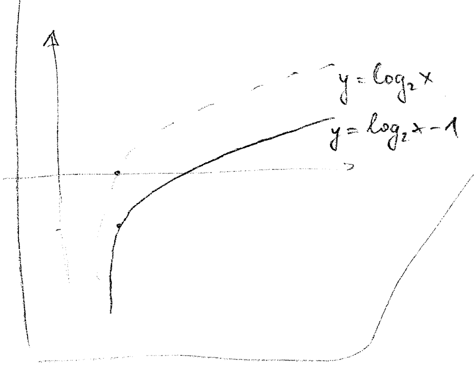
2) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 (2^3)}{\log_2 (2^2)} = \frac{3}{2}$

3) $\log_5 8 + \log_5 4 = \log_5 (8\cdot 4) = \log_5 32 = \log_5 2^5 = 5 \cdot \log_5 2$

4) Skizziere $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\log_2 \left(\frac{2}{x}\right)}{\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)} = -\log_2 \frac{2}{x} = -(\log_2 2 - \log_2 x)$

$= -1 + \log_2 x$

in der Übung

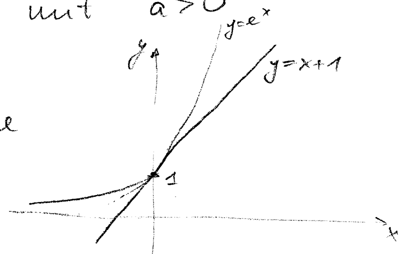


5) Es gilt immer $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = (\log_b a)^{-1}$

Beweis: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ ✓

▶ Die Funktion e^x und der natürliche Logarithmus

Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ gehen durch den Punkt $P = (0,1)$.



Die Tangenten im Punkt P sind für verschiedene a unterschiedlich und von der Form

$y = mx + 1.$

Es gibt genau einen Wert von a, wofür $m = 1$ ist, nämlich $a = e \approx 2{,}71828\ldots$

Den Logarithmus mit der Grundzahl e heißt "natürlicher" Log.

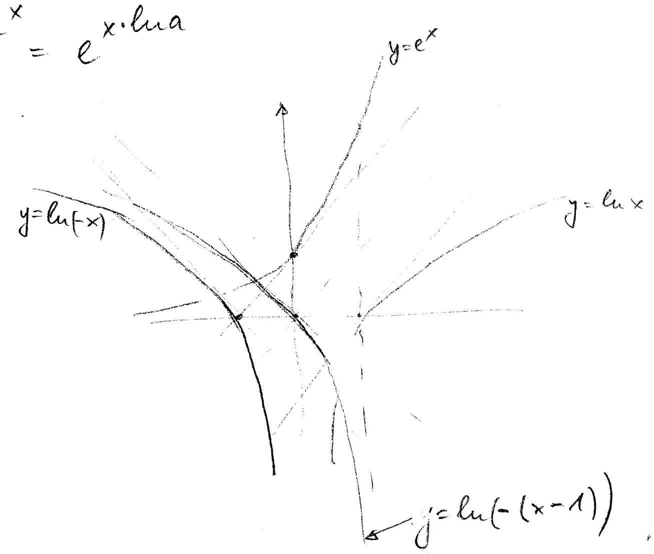
Statt $\log_e x$ schreibt man $\ln x$.

e^x und $\ln x$ sind zueinander invers, d.h. $x = e^{\ln x} = \ln(e^x)$.

Auf a^x angewendet:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$$

Bsp Skizziere $y = \ln(1-x)$, $x < 1$



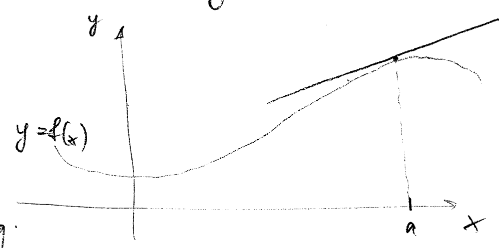
1) $y = \ln x$ ist die Spiegelung von $y = e^x$ an $y = x$

2) $y = \ln(-x)$ ist die Spiegelung von $y = \ln x$ an y-Achse

3) $y = \ln(-(x-1)) = \ln(1-x)$ ist die Verschiebung von $y = \ln(-x)$ um 1 nach rechts.

▶ Tangente an den Graphen und Ableitung

Die Tangente von $f(x)$ im Punkt a bzw. $(a, f(a))$ hat die Gleichung



$$y = f(a) + m(x-a),$$

(bzw $x = a$, falls sie senkrecht ist!)

wobei die Steigung m ist die Ableitung

$$m = f'(a) \Big[:= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ ← das ist eigentlich Def von Ableitung in a)

Bsp 1) $f(x) = mx + b$

$f'(x) = m$, die Tangente ist also für alle a:

$y = f(a) + m(x-a) = ma + b + mx - ma = mx + b$

2) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ für alle x.

Tangente im Punkt 0 ist

$y = f(0) + f'(0)(x-0) = e^0 + e^0 \cdot x = x + 1$

3) $f(x) = 2x^2 - 3$ in $a = 1$:

$f'(x) = 4x$; $f'(1) = 4$ $\Rightarrow$

Tangente in $a = 1$ $y = f(1) + f'(1)(x-1) = -1 + 4(x-1) = 4x - 5$

1| Übung 5

A1 Skizziere die Graphen der Funktionen. Bestimme insb. die waagerechte und senkrechte Asymptote, sowie die evtl. Schnittpkte des Graphen mit Koordinatenachsen.

$\frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{2x-4}{1-5x}$ $\quad \frac{x+2}{3x-1}$

$\frac{x+1}{x}$ $\quad \frac{x+3}{4+7x}$ $\quad \frac{x+2}{x-2}$

A2 Berechne die Schnittpkte der Graphen von f und g:

1) $f(x)=\frac{8}{x+3}$ und $g(x)=2x$

2) $f(x)=\frac{2x-1}{3-2x}$ und $g(x)=3-2x$

3) $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ und $g(x)=2-x$

A3 Berechne bzw. vereinfache

$2^{(3^5)}$; $2^{1+x}\cdot 3^x$; $\sqrt{9^{x-1}}$; $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$; $2^x\cdot 4^{1-x}\cdot 8^x$

A4 Skizziere

3^{2x-1} ; $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$; $2^{x-1}-\frac{1}{2}$; e^{1-x} ; $*\, e^{-x^2}$

A5 Berechne bzw. vereinfache:

$\log_3\frac{2}{9}-\log_3\frac{8}{27}$

$\log_{\frac{1}{2}}5+\log_2 5$

$\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$

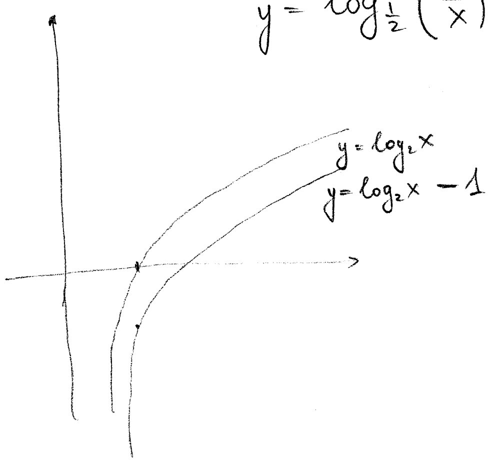
$\log_5 8\cdot\log_5 4$

$\log_{10}(2^6)-\log_{10}\frac{1}{2}$

$\log_2 5+\log_2 3$

Bsp Skizziere $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x}\right)$

$$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}{\underbrace{\log_2\frac{1}{2}}_{=-1}}=-\log_2\left(\frac{2}{x}\right)=-(\log_2 2-\log_2 x)$$
$$=-1+\log_2 x$$



A6 Skizziere

$\log_2(x-1)$ $\quad \ln(4x-4)$

$\log_{\frac{2}{3}}(4x)$ $\quad \ln\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}x^2\right)$ $\quad \ln\frac{3}{x^3}$

$*\ \log_2(1-x^2)$ $\quad *\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

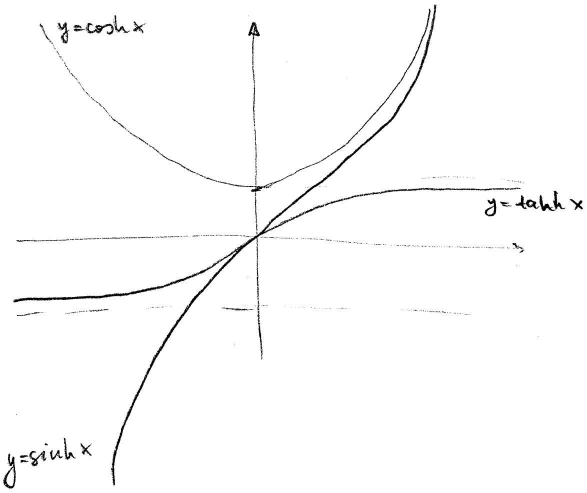
2

Bsp (hyperbolische Funktionen)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$



Es gilt

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$

Bew: 1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2e^x e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^x e^{-x}+e^{-2x})}{4} =$

$$= \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

2) $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\sinh^2 x + 1}{\cosh^2 x} \overset{(1)}{=} \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} = 1.$

A7 Bestimme Gleichung der Tangenten an den Graphen von $f(x)$ im Punkt a:

1) $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$, $a = 0$

2) $f(x) = x^3 + x - 3$, $a = 0$

3) $f(x) = x^2 - 3\sqrt{x} - 3$, $a = 4$

4) $f(x) = x^{-4} - 2$, $a = 1$

5) $f(x) = e^x$, $a = 2$

6) $f(x) = \cosh x$, $a = 0$

7) $f(x) = \sinh x$, $a = 0$

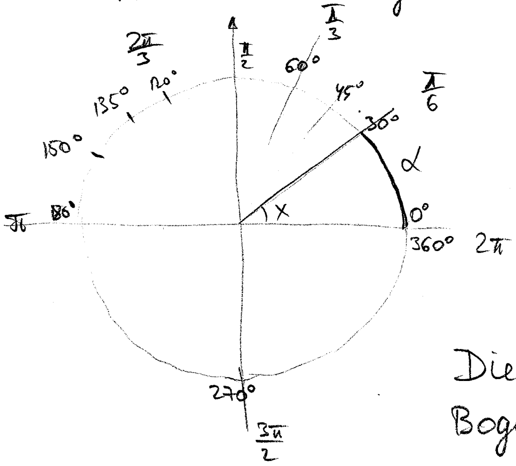
8) $f(x) = \sinh x$, $a = 1$

A8* Skizziere

$\log_2 |x|$; $\log_{10} |x-1|$; $\log_{\frac{1}{10}} |10-3x|$; $e^{-|x-1|}$

§7. Trigonometrie. Trigonometrische Funktionen

▸ Winkelmessung



Mittelpunktwinkel $x°$ in einem Einheitskreis

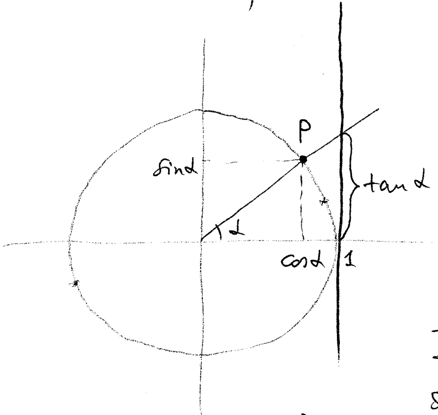
Die entsprechende Bogenlänge

$$\alpha = 2\pi \frac{x°}{360°} \quad (\text{maßlos}) \quad \text{genannt "Radiant"}$$

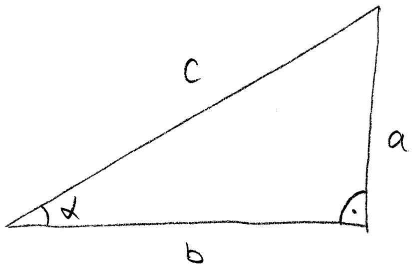
$$x = \frac{360° \cdot \alpha}{2\pi} \quad (\text{Grad})$$

Die Winkelfunktionen werden auf Bogenlänge (Radiant) angewendet.

▸ Sinus, Cosinus, Tangens



$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

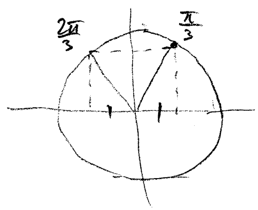
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Definition mit dem Einheitskreis ist der schnellste Weg, den Wert auszurechnen. Dafür braucht man aber die Tabellenwerte auswendig gelernt haben

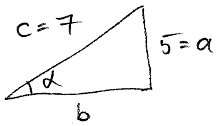
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Bsp $\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$



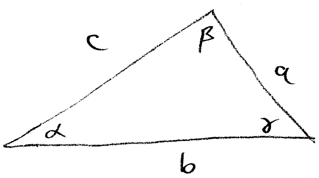
Bsp $\quad \sin\alpha = \frac{5}{7}$. Berechne $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$.



Pythagoras: $\quad b = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{49-25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

▸ Dreieckgeometrie



$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Sinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ Cosinussatz

Flächeninhalt $= \frac{1}{2}$ Grundseite $\cdot$ Höhe $= \frac{1}{2} bc\sin\alpha = \ldots$

Nach Angabe von 3 Infos kann alles ermittelt werden.

(Richtig? Nein — mind. 1 Seite!)

Bsp $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $a = 1$, $c = 2$

1) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

2) $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

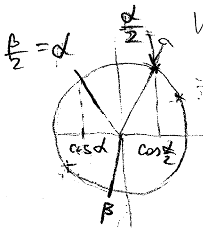
3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$

▶ Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Bsp $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$
$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$



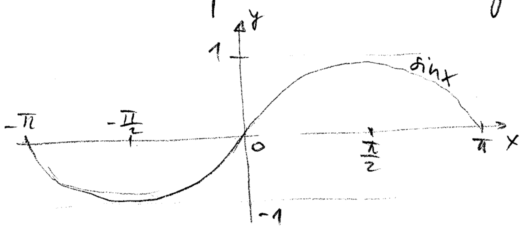
Umkehren liefert dann:

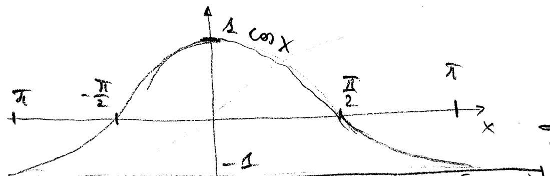
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}\ ,\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$$

Bsp $\cos\frac{5}{12}\pi = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{5}{6}\pi\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

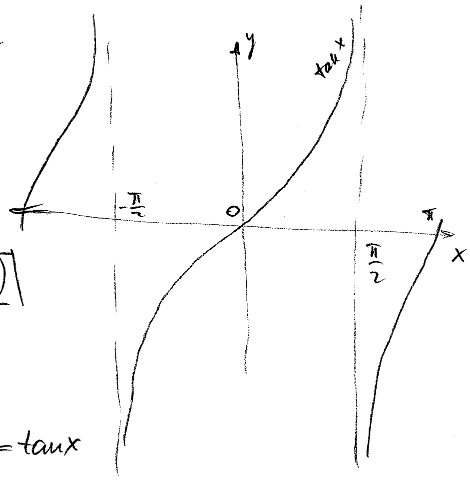
da $\frac{5\pi}{12}$ im ersten Quadranten liegt

▶ Graphen der trigonometrischen Funktionen





$\boxed{\text{insb.: } \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$



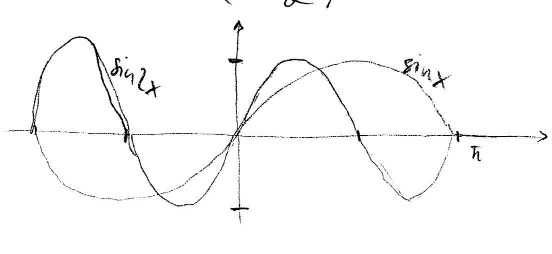
Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$ sind
<u>periodisch</u>:
- $\sin x$ und $\cos x$ mit Periode 2π
- $\tan x$ mit Periode π : $\tan(\pi+x) = \tan x$

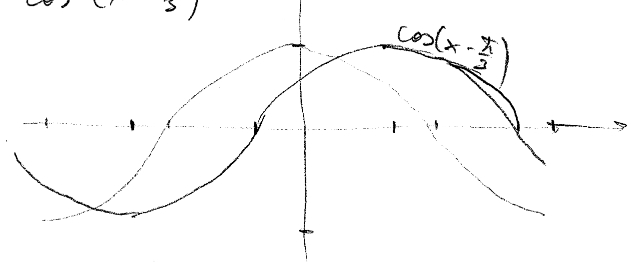
$\tan$ von $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ist nicht def. (siehe Def. mit Kreistangente)

Symmetrieeigenschaften:
- $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = \tan x$ (Zentralsymmetrisch, ungerade)
- $\cos(-x) = \cos x$ (Achsensymmetrisch, gerade)

Bsp Graph von $\sin 2x \rightsquigarrow \sin x$ in waagerechten Richtung um Faktor 2 zusammen gedrückt $\rightsquigarrow$ die Periode von $\sin 2x$ ist $\pi \left(= \frac{2\pi}{2}\right)$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightsquigarrow$ um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts

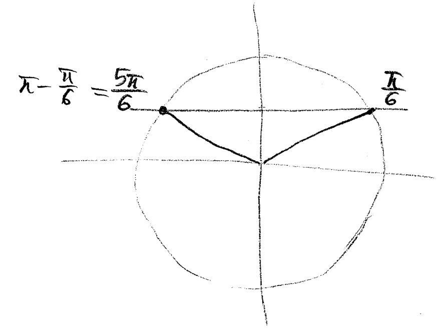




Bsp Bestimme alle Lösungen von

1) $\sin x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

oder $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



2) $\tan x = -1 \rightsquigarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

▸ Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens

Gilt für den Winkel x (in Radiant) etwa $\sin x = \frac{1}{2}$, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten für x (periodisch, jeder Wert außer ± 1 wird während einer Periode zweimal angenommen).

Ist dagegen $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, so wäre die Lösung eindeutig.

Für cos wählt man dafür das Intervall $0 \le x \le \pi$

Für tan $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Nun gibt es für ein vorgegebenes y_0 genau ein Wert x_0 aus dem Intervall, für welchen gilt $\sin x_0 = y_0$, $\cos x_0 = y_0$ bzw. $\tan x_0 = y_0$

Die zugehörige Zuordnungen nennen wir Arcussinus, Arcuscosinus, bzw. Arcustan:

$x = \arcsin y \iff y = \sin x$ und $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$x = \arccos y \iff y = \cos x$ und $0 \le x \le \pi$

$x = \arctan y \iff y = \tan x$ und $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Inverse Funkt.

$\sin(\arcsin y) = y$

$\arcsin(\sin x) = x$

Bsp 1) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, denn $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

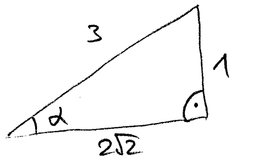
2) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, denn $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bsp Wir berechnen exakt:

$\cos(\arcsin\frac{1}{3}) =: \cos\alpha$

dritte Seite $= \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \cos(\arcsin\frac{1}{3})$



$\sin\alpha = \frac{1}{3}$

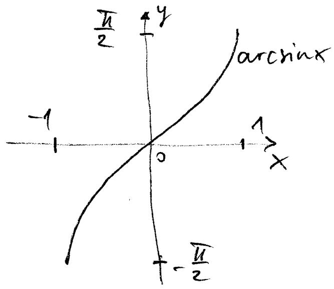
$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{3}$

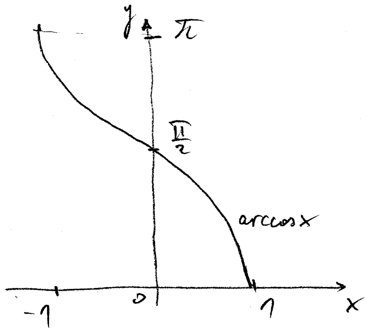
Bsp 1) $\arcsin(\cos\frac{\pi}{5}) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$

2) $\arccos(\sin\frac{3\pi}{7}) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right)\right) = \frac{7\pi - 6\pi}{14} = \frac{\pi}{14}$

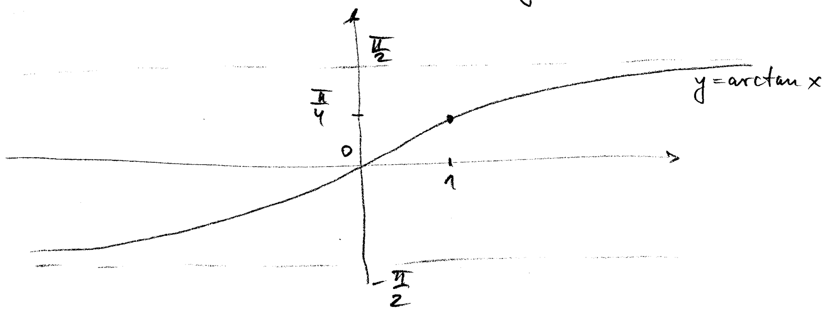
▶ Graphen von Arcus-Funktionen

$\arcsin x$ und $\arccos x$ haben das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ als Definitionsbereich





$\arctan x$ ist für alle Werte von x definiert.
Geraden $x = \pm \frac{\pi}{2}$ sind wagerechten Asymptoten



$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

1)

Übung 6

A1 Berechne (benutze Einheitskreis und Tabelle)

$\cos\frac{3\pi}{4}$; $\cos\frac{11\pi}{6}$; $\tan\frac{5\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\sin 3\pi$; $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; $\tan\frac{4\pi}{3}$

A2 Berechne $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$, falls gegeben:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$
2) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$
3) $\sin\alpha = \frac{3}{8}$
4) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$
5) $\cos\alpha = \frac{1}{6}$
6) $\sin\alpha = \frac{1}{8}$
7) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
8) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$
9) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$

A3 Finde Seiten, Winkel (falls Tabellenwerte) und die Fläche des Dreiecks mit

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $c = 1$
2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $c = 1$, $b = 2$
3) $a = b = c = \sqrt{2}$
4) $a = b = 1$, $c = 2$
5) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$
*6) $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$, $\alpha = \alpha$ (Parameter)

Bsp Wir leiten die Additionstheorem für tan aus sin und cos:

z.z.: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

Bew: Es gilt $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$ sowie
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Teile I durch II (warum darf man?):

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

(nun Z. und N. durch $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ teilen) warum darf man?

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

A4 Beweise: 1) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 2) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

4) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
5) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

A5 Berechne genau (benutze z.B. die Formel für halben Winkel)

$\sin\frac{1}{8}\pi$ $\quad$ $\sin\frac{3}{8}\pi$ $\quad$ $\sin\frac{11}{8}\pi$

$\cos\frac{1}{8}\pi$ $\quad$ $\cos\frac{3}{8}\pi$ $\quad$ $\tan\frac{13}{12}\pi$

2|

A6 Skizziere die Graphen von

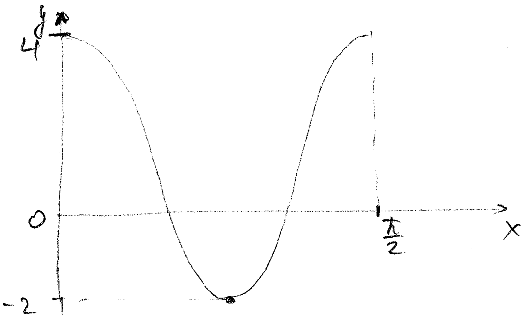
$\sin(-x)$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ $\qquad$ $\sin\left(2x+\frac{20}{3}\pi\right)$ $\qquad$ $*$: $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos(3x)$ $\qquad$ $\cos\left(2\pi x+\frac{1}{2}\pi\right)$ $\qquad$ $*$: $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $\tan(2x)$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{1}{3}x-\frac{17}{6}\pi\right)$

Bsp Die folgende Skizze stellt Teil des Graphen der Funktion $y=p\cos qx+r$ dar:

Bestimme die Werte von p, q und r.



1) Die Periode auf dem Bild ist $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $q=4$
(Graph von $\cos x$ in waagerechter Richtung um Faktor 4 zusammen gedrückt).

2) Die Amplitude (max. vertikale Schwingung) bei $\cos x$ ist 2, hier ist . Also ist $p=3$ (Graph von $\cos x$ um Faktor 3 gestreckt)

3) Einsetzen von $x=0$ liefert nun r:
$4=3\cdot\cos 4\cdot 0+r$ $\Rightarrow$ $r=4-3=1$

A7 Finde alle Lösungen folgender Gleichungen:

$\cos x=\frac{1}{2}$; $\quad$ $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad$ $\tan x=-\sqrt{3}$; $\quad$ $\cos x=0$

A8 Berechne exakt

$\arccos 0$; $\quad$ $\arctan(-1)$; $\quad$ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad$ $\arccos -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $\quad$ $\arctan\left(\tan\frac{5}{4}\pi\right)$

A9* Berechne exakt

$\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; $\quad$ $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; $\quad$ $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$; $\quad$ $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)$

$\sin(\arctan(-4))$;

A10 Berechne

$\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)$; $\quad$ $\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$; $\quad$ $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right)$; $\quad$ $\arctan\left(\tan\frac{9\pi}{5}\right)$

A11* Skizziere die Graphen der folgender Funktionen (bestimme zuerst den Definitionsbereich!)

$\arcsin 2x$ $\qquad$ $\arccos\left(-\frac{x}{3}\right)$ $\qquad$ $\arctan(-3x+1)$ $\qquad$ $\arctan(1-x^2)$

$\arccos 2x$ $\qquad$ $\arcsin(1-x)$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}+\arcsin x$ $\qquad$ $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$\arctan(-x)$ $\qquad$ $\arccos(1+x)$

§8 Ableitungen. Kurvendiskussion

▶ Recheuregeln und Standardableitungen

$$\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x) \qquad c \text{ eine Konstante}$$

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p\cdot x^{p-1}$	für jedes p
a^x	$a^x \ln a$	für jedes $a>0$
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot \ln a}$	$a>0,\ a\neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Bsp 1) $(x^4-3x^2+2)' = 3x^3 - 3\cdot 3x^2 = 3x^3 - 9x^2$

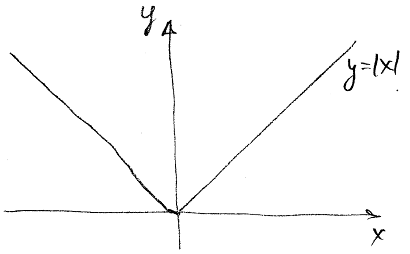
2) $\left((x^3-1)^5\right)' = 5(x^3-1)^4\cdot(3x^2) = 15x^2(x^3-1)^4$

3) $\sin(x^2+1) = \cos(x^2+1)\cdot 2x = 2x\cdot\cos(x^2+1)$

4) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = x^{-1}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{4}{3}}$

$f'(x) = \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

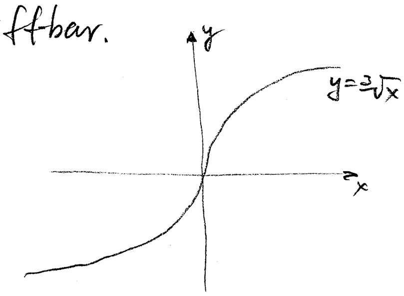
▸ Differenzierbarkeit



Die Zahl $f'(a)$ ist die Steigung der Tangenten an den Graphen im Punkt a. Falls die Tangente im Punkt a nicht existiert (Graph nicht glatt), oder senkrecht steht, so sagt man, dass f im Punkt a nicht differenzierbar ist.

Bsp 1) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ im 0 nicht diffbar.



2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(0)$ ↯ $\Rightarrow$ im 0 nicht diff-bar

▸ Höhere Ableitungen

Bsp 1) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = (f'(x))' = (e^x)' = e^x$ usw.

2) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$; $f'(x) = -x^{-2}$; $f''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$,

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$, ...

3) $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$, ...

▸ Intervalle der Monotonie

1) $f(x)$ ist (streng) monoton wachsend auf I, falls für alle $x_1 < x_2$ aus I gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$)

2) $f(x)$ ist (streng) monoton fallend auf I, falls für alle $x_1 < x_2$ aus I gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$)

Ist f diff-bar auf I, so gilt:

1) $f(x)$ monoton wachsend auf I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$;
($f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton wachsend)

2) $f(x)$ monoton fallend auf I $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$
($f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend)

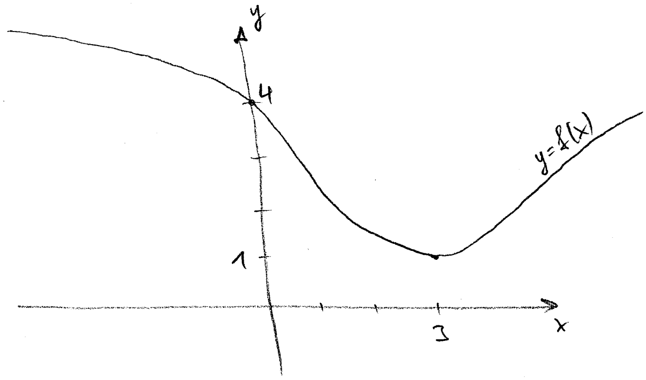
Bsp Bestimme Intervalle der Monotonie und skizziere

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 3$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$

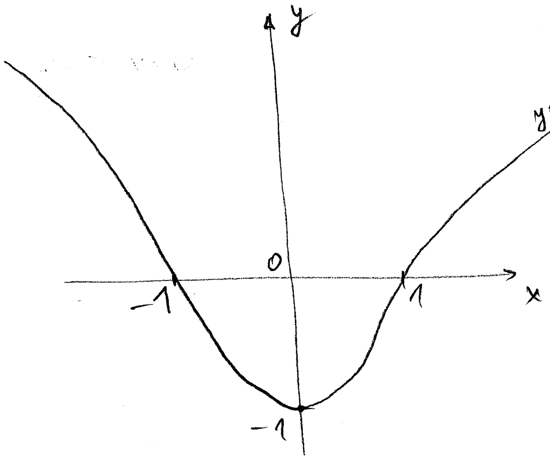


2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^4}$

$f'(x) = 0$ für $x = 0$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$



3) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $x \neq -1$

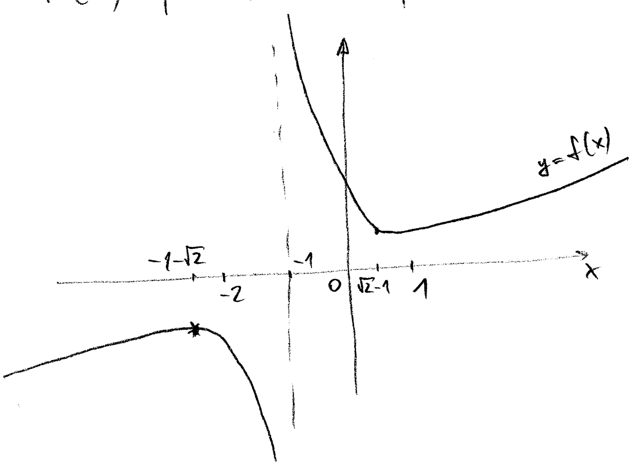
$f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ falls $x^2 + 2x - 1 = 0$

$(x^2+2x+1) - 1 - 1 = 0$

$(x+1)^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} - 1$

	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$-1-\sqrt{2}$	$(-1-\sqrt{2}, -1)$	-1	$(-1, -1+\sqrt{2})$	$-1+\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	↯	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	↯	$\searrow$	$2(-1+\sqrt{2})$	$\nearrow$



▸ Kritische Punkte und Extremwerte

1) Gilt für einen a: $f'(a)=0$ oder ist f im Punkt a nicht diff-bar, so heißt a ein kritischer Punkt von f

2) Gilt $f(x) \le f(c)$ (bzw. $f(x) \ge f(c)$) für alle x aus einer Umgebung von c (d.h. für alle x mit $|x-c|<r$ für ein $r>0$), so heißt $f(c)$ ein (lokales) Maximum (bzw. Minimum)
Gemeinsam heißen Maxima und Minima Extremwerte (oder Extrema)
Der Punkt c, für welchen $f(c)$ ein Extremum ist, heißt Extrempunkt oder Extremstelle.

3) Ist f diff-bar im Extrempunkt c, so ist $f'(c)=0$.

Bsp (siehe voriges Bsp)

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$ hat ein Min 1 für $x=3$. ← global

2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ hat ein Min -1 für $x=0$. ← global

3) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ hat ein Max in $x=-1-\sqrt{2}$ ← nur lokal
hat ein Min in $x=-1+\sqrt{2}$

▸ Eine stetige Funktion erreicht auf einem (geschl.) Intervall ihr (globales) Maximum bzw. Minimum.

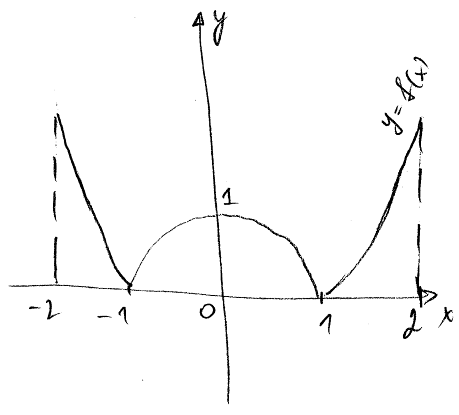
Bsp 1) $f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & x \le -1 \text{ und } x \ge 1 \\ -x^2+1, & -1 \le x \le 1 \end{cases}$ $\quad x \in [-2,2]$

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x<-1 \text{ und } x>1 \\ -2x, & -1<x<1 \end{cases}$

$f'(\pm 1)$ existiert nicht

$f'(x) = 0$ für $x=0$

kritische Punkte: $x=0$, $x=-1$, $x=1$



	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$-$	↯	$+$	0	$-$	↯	$+$	
$f(x)$	3	↘	0 (min)	↗	1 (max)	↘	0 (min)		3

lokale Minima für $x = \pm 1$; lokales Max für $x = 1$
globales Maximum $= 3$ bei $x = \pm 2$;
globales Minimum $= 0$ bei $x = \pm 1$.

1)

Übung 7

A1 Finde die Ableitung

$4x^4-3x^2+2$ $\qquad \sqrt{x^2+x}$ $\qquad \frac{x}{x+1}$ $\qquad x^2e^{-x}$

$x\sqrt{x}$ $\qquad x\cdot\sin x$ $\qquad \frac{x}{x^2+1}$ $\qquad \tan(2x-4)$

$\sqrt{x^7}$ $\qquad \sqrt{x+1}\cdot\ln x$ $\qquad \frac{\ln x}{\sin x}$ $\qquad \arctan\sqrt{x}$

$\frac{5\sqrt{x}}{x^5}$ $\qquad x\cdot\ln(\sin x)$ $\qquad e^{1+\sqrt{x}}$

A2 Für welche x sind die Funktionen definiert, aber nicht diff-bar? (+Skizze)

$|x-1|$ $\qquad |\ln(x-1)|$ $\qquad \sin|x|$ $\qquad \ln(1+\sqrt{x})$

$|x^2-1|$ $\qquad e^{|x|}$ $\qquad |\sin x|$

A3 Berechne erste und zweite Ableitung von

$\sqrt{x+1}$ $\qquad \ln(x^2+1)$ $\qquad \tan x$ $\qquad \frac{\sin x}{x}$

$\frac{x-1}{x+1}$ $\qquad x^2\cos 2x$ $\qquad \arctan x$ $\qquad \sin^2 x$

Bsp Finde die Vorschrift für $f^{(n)}(x)$, wobei $f(x)=x\cdot e^x$

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=e^x(x+2)$

$f^{(3)}(x)=e^x+(x+2)e^x=e^x(x+3)$ ...

usw.

$f^{(n)}(x)=e^x(x+n)$

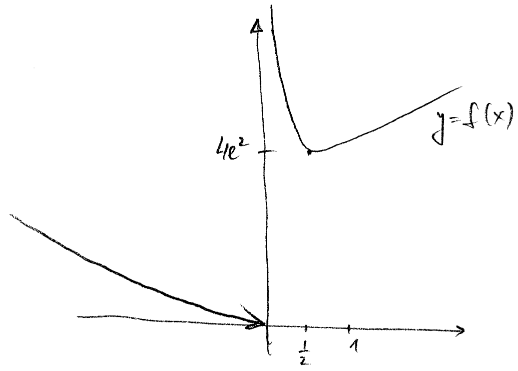
A4 Finde die Vorschrift für $f^{(n)}(x)$ und finde $f^{(10)}(x)$:

e^{-x}; e^{2x}; $\frac{1}{x+1}$, xe^{-x}, x^{10}

Bsp Bestimme Intervalle der Monotonie der Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Skizziere den Graphen von $f(x)$.



$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$$

$f'(x) = 0$ für $x = \frac{1}{2}$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	↯	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↯	↘	$4e^2$ min	↗

A5 Bestimme Intervalle der Monotonie, skizziere

x^3+1; x^3+x, $\frac{1}{x^2}$, $\arctan x^2$

A6 Bestimme alle lokale Extrema (mit Extrempunkten!)

$f(x) = x^3 - x$ $\qquad f(x) = x \ln x$

$f(x) = |x-1|$ $\qquad f(x) = x e^{-x^2}$

A7 Finde das Maximum und das Minimum der Funktion f auf dem Intervall I.

1) $f(x) = \sin x^2$ $\qquad I = [0, \sqrt{\pi}]$

2) $f(x) = \ln \cos x$ $\qquad I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2$ $\qquad I = [-1, 5]$

4) $f(x) = (x-5)e^x$ $\qquad I = [-5, 5]$

A8* Untersuche auf lokale Extrema:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$$

[lok. Min bei $x = \frac{4}{3}$
lok. Max bei $x = 2$]

A9* Untersuche auf lokale Extrema, bestimme den minimalen und maximalen Wert auf $[a,b]$:

1) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[a,b] = [-1, 4]$

[lok Min bei $x = 3$, $x = 0$
lok Max bei $x = 1$
$\min\limits_{x\in[-1,4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{x\in[-1,4]} f(x) = e^4$]

2) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 2ex\ln x, & x > 0 \end{cases}$, $[a,b] = [-1, 2]$

[lok Min bei $x = \frac{1}{e}$
lok. Max bei $x = 0$
$\min\limits_{x\in[-1,2]} f(x) = -2$
$\max\limits_{x\in[-1,2]} f(x) = 4e\ln 2$]

§9. Integrieren

Ist $F'(x) = f(x)$ für alle x aus I, so heißt $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf I.

$G(x) = F(x) + c$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von f.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= [F(x)]_a^b\right),$$

wobei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von f ist.

▸ Rechenregeln

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx\;; \qquad \int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\left(F(c\cdot b) - F(c\cdot a)\right)$$

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \text{für alle } a, b, c \in I$$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \quad \text{und} \quad \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = -f(x)$$

<u>Bemerkung</u> Die Integrationsvariable x in $\int_a^b f(x)\,dx$ kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden. Es ist eine „dummy" Variable, vgl. Summationsindex in einer Summe $\sum_{i=0}^{n} f(i)$

▸ Stammfunktionen der Standardfunktionen

$f(x)$	$F(x)$ bis auf Konstante	
x^p	$\frac{1}{1+p} x^{p+1}$	$p \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$	$a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x	
$\frac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Bsp 1) $\int_0^2 (x^4-5x^3-1)\,dx = \int_0^2 x^4 dx - 5\int_0^2 x^3 dx - \int_0^2 1\cdot dx$

$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - [x]_0^2 = \left(\frac{2^5}{5}-0\right) - 5\left(\frac{2^4}{4}-0\right) - (2-0)$

$= \frac{32}{5} - \frac{5\cdot 16}{4} - 2 = \frac{32}{5} - 22 = \frac{78}{5}$

2) $\int_{-1}^1 (x-e^{-x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 - \left[-e^{-x}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) - \left(-e^{-1}+e\right) = \frac{1}{e} - e$

denn $(-e^{-x})' = e^{-x}$

3) $\int_0^1 \cos \pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi\cdot 1) - \sin(\pi\cdot 0)\right] = 0$

▶ Unbestimmte Integrale

Stammfunktionen von $f(x)$ bezeichnet man oft als $\int f(x)dx$, also $\int f(x)dx = F(x) + c$, wobei $F(x)$ <u>eine</u> Stammfkt. ist

Bsp 1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}$

2) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2}dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x$

$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$

▶ Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\underbrace{g'(x)\,dx}_{dg} = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Bsp 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot e^{\sin x}dx$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$

Substitutionsregel mit $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ anwenden

Notation: für $u = u(x)$ schreiben wir $du = u'dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^0 = e - 1$

2) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1)^{1/2} d(x+1) = \left[\frac{3}{2}(x+1)^{3/2}\right]_0^3$

$= \frac{3}{2}\,4^{3/2} - \frac{3}{2}\cdot 1^{3/2} = 3\cdot 4 - \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$

$= -\left[\ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

4) $\int_2^4 (2x-5)^5 dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (2x-5)^5 d(2x-5) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}(2x-5)^6\right]_2^4 = \ldots = \frac{182}{3}$

(da $d(2x-5) = (2x-5)'dx = 2dx$)

$dx = \frac{1}{2}d(2x-5)$

Bsp 5) $\int_0^2 x(x-1)^5 dx = \left[\begin{matrix} u = x-1, & x=0 \to u=-1 \\ du = dx, & x=2 \to u=1 \end{matrix}\right] = \int_{-1}^1 (u+1)u^5 du$

$= \int_{-1}^1 (u^6+u^5) du = \left[\frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{7}$

6) $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\begin{matrix} u = e^x & x=-1 \to u = \frac{1}{e} \\ du = e^x dx = u dx & x = 1 \to u = e \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du & \end{matrix}\right] = \int_{1/e}^e \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du$

$= \int_{1/e}^e \frac{1}{1+u^2} du = \left[\arctan u\right]_{1/e}^e = \arctan e - \arctan \frac{1}{e}$

- Partielle Integration

Produktregel: $d(f(x)g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$

$\Leftrightarrow f(x)dg(x) = d(f(x)g(x)) - g(x)df(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$

Bsp 1) $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx = \left[\begin{matrix} f = \ln x \Rightarrow df = \frac{1}{x} dx \\ dg = x^3 dx \Rightarrow g = \frac{x^4}{4} \end{matrix}\right] =$

$= \left[\frac{x^4}{4} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = 4\ln 2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx$

$= 4\ln 2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$

2) $\int_0^1 x e^x dx = \left[\begin{matrix} f = x \Rightarrow df = dx \\ dg = e^x dx \Rightarrow g = e^x \end{matrix}\right] = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

3) $\int_0^\pi x \sin x \, dx = \left[\begin{matrix} f = x \Rightarrow df = dx \\ dg = \sin x \, dx \Rightarrow g = -\cos x \end{matrix}\right] = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx$

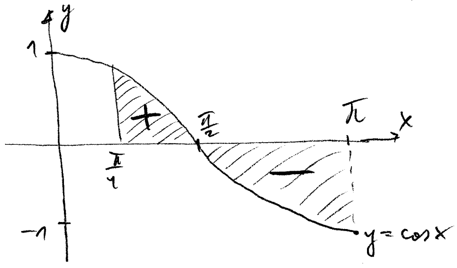
$= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$

4) $\int_0^1 \arctan x \, dx = \left[\begin{matrix} f = \arctan x \Rightarrow df = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dg = dx \Rightarrow g = x \end{matrix}\right]$

$= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot x dx = \left[\begin{matrix} u = 1+x^2 & x=0 \to u=1 \\ du = 2x dx & x=1 \to u=2 \\ x dx = \frac{du}{2} & \end{matrix}\right]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln|u|]_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

▶ Fläche unter dem Graphen

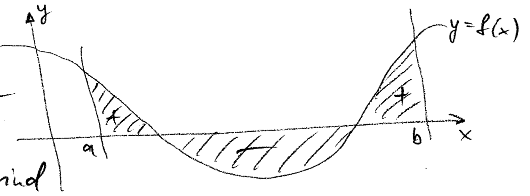


Bsp 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

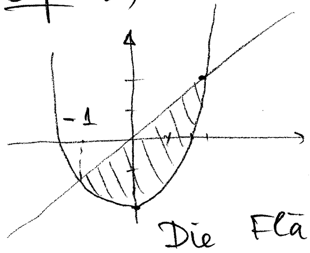
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

i.A. ist $\int_a^b f(x)$ ist gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f, x-Achse und den senkrechten Geraden $x=a$ und $x=b$, wobei die Teile unterhalb der x-Achse negativ gezählt sind!



Bsp 2) Berechne die Fläche zwischen der Parabel $y = x^2 - 2$ und Ger. $y = x$



Schnittpkte $\quad x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$

Da der Graph von $f(x) = x$ oberhalb des Graphen von $g(x) = x^2 - 2$ liegt, ist $f(x) - g(x) \geq 0$ für $-1 \leq x \leq 2$.

Die Fläche ist:

$$\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)] \, dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{12 - 16 + 24 - 3 - 2 + 12}{6} = \frac{27}{6}$$

Übung 8

A1 Berechne die Integrale

$\int_0^2 (x-\sqrt{x})\,dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)dx$

$\int_{-2}^2 (3x^2-2x^3)\,dx$

$\int_{-\pi}^0 (x+\sin x)\,dx$

$\int_0^2 2^x\,dx$

$\int_1^2 e^{x-1}\,dx$

$\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx$

$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

$\int_{-1}^0 \frac{1}{3x-1}\,dx$

$\int_1^2 \frac{2}{x\sqrt{x}}\,dx$

$\int (4x^3-2x^2+x+1)\,dx$

$\int (3-2x^3)\,dx$

$\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$\int \sin 3x\,dx$

$\int \sin^2 x\,dx$ $\quad [\cos 2x = 1-2\sin^2 x]$

$\int \cos^2 \frac{x}{2}$ $\quad [\cos 2x = 2\cos^2 x - 1]$

A2 Berechne mit Substitutionsregel

$\int_0^1 (1+x)^9\,dx$

$\int_{-1}^1 (2+3x)^5\,dx$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

$\int_{-1}^1 e^{2x+1}\,dx$

$\int_0^1 x e^{x^2}\,dx$

$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$\int_0^{\pi} \cos \frac{1}{3}x\,dx$

$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cos x^3\,dx$

$\int_0^{\pi} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(\sin x)\,dx$

$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ $\quad (u=\sqrt{x+1})$

$\int_1^4 \frac{1}{x+2\sqrt{x}}\,dx$ $\quad (u=\sqrt{x})$

$\int_0^1 (x+1)(2x+x^2)^3\,dx$ $\quad (u=x+1)$

$\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

A3 Berechne mit partieller Integration

1) $\int_{-\pi}^0 x\cos x\,dx$ $\quad (f=x,\ dg=\cos x\,dx)$

2) $\int_1^e x\ln x\,dx$ $\quad (f=\ln x,\ dg=x\,dx)$

3) $\int_0^1 x e^{3x}\,dx$ $\quad (f=x,\ dg=e^{3x}\,dx)$

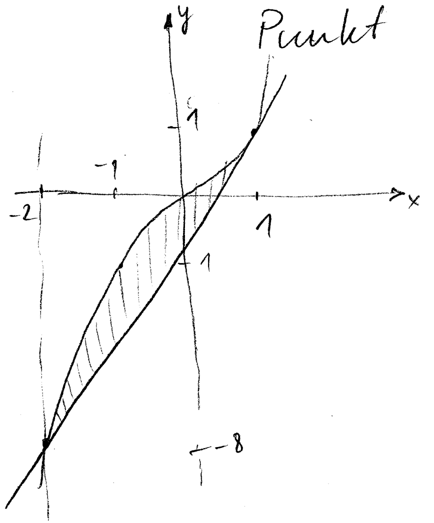
4) $\int_1^e \ln x\,dx$ $\quad (f=\ln x,\ dg=dx)$

A4 Berechne (irgendwie)

$\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ | $\int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx$ | $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

$\int_1^e \ln 2x\,dx$ | $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot e^{-\sin 2x}\,dx$

Bsp Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)=x^3$ und der Tangenten an $f(x)$ im Punkt $P=(1,1)$



a) die Tangente hat die Gleichung:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \qquad f'(x) = 3x^2$$
$$y = 1 + 3(x-1) = 3x-2$$

b) Schnittpkte des Graphen von $f(x)$ und der Tang.

$$x^3 = 3x-2$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Eine NS ist $x=1$. Polynomdivision:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2)$$
$$\underline{x^3 - x^2}$$
$$x^2 - 3x$$
$$\underline{x^2 - x}$$
$$-2x+2$$
$$\underline{-2x+2}$$
$$-$$

Die NS von x^2+x-2:

$$x^2+x-2=0$$
$$\left(x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\right)-\tfrac{1}{4}-2=0$$
$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}$$
$$x = \pm\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2$$

x^3 und $3x-2$ schneiden sich in Punkten $(-2,-8)$ und $(1,1)$.

c) Sei $g(x) = 3x-2$. $\quad f(x)-g(x) \geq 0$ für $-2 \leq x \leq 1$.

Somit ist die Fläche gleich:

$$\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^1 - \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^1 + \left[2x\right]_{-2}^1$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{16}{4} - \frac{3}{2} + \frac{12}{2} + 2 + 4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1-6+32}{4} = \frac{27}{4}$$

A5 Berechne die Fläche zwischen

1) $y=x^2$ und $y=1-x^2$,
2) $y=\sqrt{x}$ und $y=x^3$,
3) $y=e^x$, $x=0$ und $y=e$.

§10. Mengen und Logik

10.1 Logik

▶ A und B Aussagen, dann (Konnektiven bzw. "logische Operationen")

$A \Rightarrow B$: "wenn A, dann B", "Aus A folgt B"

$A \Leftrightarrow B$ "A ist äquivalent zu B", "A genau dann, wenn B"

$\neg A$ "nicht A"

$A \vee B$ "A oder B" (nicht ausschließende Bedeutung)

$A \wedge B$ "A und B"

▶ Eine Aussage kann wahr oder falsch sein. Die Wahrheit der zusammengesetzten Aussage hängt ab von den einzelnen Teilen.

Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

z.B. ist $A \Rightarrow B$ nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Insb. ist $A \Rightarrow B$ wahr, wenn A falsch ist. In der Tat: aus einer falschen Aussage kann man alles folgern.

▶ Aussagen, welche unabhängig von der Wahrheit der Bestandteile immer wahr sind, heißen Tautologien.

Bsp
1) $A \vee \neg A$
2) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
3) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
4) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
6) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Bew (von 3) Wahrheitstafel

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

▶ Quantoren: $\forall$ "für alle" und $\exists$ existiert

Bsp: Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reelle Nullstelle:

1) $(\neg \exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0)$ oder

$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 \neq 0)$

(Beim Negieren vertauschen sich die Quantoren)

2) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y)$ ist falsch; $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x > y)$ ist wahr!

10.2 Mengen

- **Cantor**: Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
  Die Objekte heißen Elemente der Menge.

  $a \in A$ heißt "a ist ein Element der Menge A"

  $x \notin A$ "x liegt nicht in A" $\Leftrightarrow \neg(x \in A)$

Bsp. $X = \{a, b, c, d\}$ Aufzählen von allen Elementen
$a \in X$, $b \in X$, $c \in X$, $d \in X$ und X hat keine anderen Elemente.

- $A = B$ heißt, dass für jedes X gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
  Insbesondere gilt $\{a, b, c, d\} = \{c, b, d, a\}$ und
  $\{a, a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$.

- $A \subset B$ (A ist eine Teilmenge von B) heißt, dass für jedes $x \in A$ stets $x \in B$ folgt.

  $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B$ und $A \neq B$.

  Eigenschaften: 1) für jede Menge A gilt: $A \subset A$
  2) Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, dann ist $A \subset C$
  3) Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann $A = B$.

- Außer Aufzählung aller Elemente kann man Teilmengen einer gegebenen Menge M durch Aussonderung von El-ten def.

  $A = \{x \in M \mid x \text{ hat eine gewisse Eigenschaft}\}$
  $= \{x \mid x \in M \text{ und hat eine gewisse Eigenschaft}\}$

  Ist die "gewisse Eigenschaft" zu streng, so wird A leer.

  $A = \emptyset$.

  Eigenschaften: 1) Es gibt nur eine leere Menge
  2) Für jede Menge X gilt $\emptyset \subset X$
  3) Wenn $A \subset \emptyset$ ist, so ist $A = \emptyset$.

- Potenzmenge $P(X)$ hat alle Teilmengen von X als El-te.

Bsp $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

10.3. Mengenoperationen

▶ $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Eigenschaften:

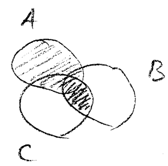
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $C \subset A$ und $C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B)$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $A \subset C$ und $B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

▶ Kommutativität: $A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

Assoziativität: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, analog '$\cup$'

Distributivitätsregeln:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Skizze, kein Beweis.

Bew. z.z. 1) Linke Menge $\subset$ rechte Menge
2) rechte Menge $\subset$ linke Menge

1) Sei $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in A$ oder ($x \in B$ und $x \in C$)

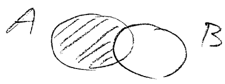
Es gibt nun zwei Möglichkeiten.

$x \in A$, dann auch $x \in (A \cup B)$ und $x \in (A \cup C)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in B$ und $x \in C$
$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ und $x \in (A \cup C)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ✓

2) Übung.

▶ $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$. (Es ist nicht vorausgesetzt, dass $B \subset A$!)



Eigenschaften: (hier U Menge, $A, B \subset U$)

- $A \cup (U \setminus A) = A$; $A \cap (U \setminus A) = \emptyset$
- $U \setminus (U \setminus A) = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow (U \setminus B) \subset (U \setminus A)$
- $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$
- $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$

$\Big\}$ Reziprozitätsgesetze von De Morgan

▶ $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (Komplexe Zahlen)
Standard-Zahlenmengen

Übung 9

A1 Welche der Aussagen sind wahr ($x, y \in \mathbb{R}$ hier)

1) $0 < 1 \vee 1 > 2$
2) $0 > 1 \wedge 1 > 2$
3) $0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$
4) $0 > 1 \Rightarrow 1 > 2$
5) $(\exists x)\ x^2 = 4$
6) $(\exists! x)\ x^2 = 4$
   (es existier ein eindeutiges x)
7) $(\forall x)(\exists y)\ x < y$
8) $(\exists x)(\forall y)\ x < y$
9) $(\forall x)(\forall y)\,[x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0]$

A2 Unter Verwendung der Aussagen

A: "Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht."

B: "Der Student hat gewissenhaft studiert."

C: "Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst."

D: "Der Student hat das Examen bestanden."

beschreibe symbolisch:

1) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.
2) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, aber nicht gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.
3) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Bilde die Negation der erhaltenden Aussageverbindungen und formuliere diese in Worten.

A3 Verneine die Aussagen aus A1. Sorge dafür, dass in den neuen Aussagen das Zeichen $\neg$ nicht vorkommt.

A4 Beweise die folgenden Tautologien mithilfe einer Wahrheitstafel

1) $(A \rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$
2) $A \vee (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$
3) $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$
4) $[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

A5 Sei $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,2\ 5,6\}$.
Bestimme $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

Bsp Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1,2,3,\dots,n\}$

Es gilt $\underline{3} \subset \underline{5}$, $3 \in \underline{5}$, $\{3\} \subset \underline{5}$, $\{2,3\} \subset \underline{3}$, $5 \notin \underline{3}$, $\underline{5} \not\subset \underline{3}$

Die Elemente von $A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$ sind selbst Mengen, also

$$\underline{2} \in A,\quad 2 \notin A,\quad \{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A,\quad \{2,3\} \not\subset A,\quad \{2,3\} \notin A.$$

A6. Bestimme alle Teilmengen von $\emptyset$, $\underline{1}$, $\underline{2}$.

A7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Zeige dies an Hand einer Zeichnung und konstruiere ein Gegenbeispiel.

Bsp $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) rechte Menge $\subset$ linke Menge
(die andere Richtung wurde in der VL gezeigt)

Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \iff x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$

$\iff$ $x \in A$ oder $x \in B)$ und $(x \in A$ oder $x \in C)$

also auf jeden Fall ist $x \in A$ und somit

$x \in A \cup (B \cap C)$ ✓

A8. Beweise die De Morganschen Regeln:
Für $A, B \subset U$ gilt

1) $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$
2) $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$

A9. Beweise (A, B, C beliebige Mengen)

1) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$
2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$